Auszug

aus Herrn

Leonhard Eulers

vollſtändigen Anleitung

zur

Algebra,

herausgegeben

von

Johann Jacob Ebert,

Prof. der Math. in Wittenberg.

Zweyter Theil.

Dritte verbeſſerte Auflage.

Berlin, 1821.

in der Voſſiſchen Buchhandlung.

Inhalt des zweyten Theils.

Erſter Abſchnitt.

Von den algebraiſchen Gleichungen und derſelben Auflöſung.

Erſtes Kapitel. Von der Auflöſung der Aufgaben überhaupt . . . . §. 1 bis 6.
Zweytes Kapitel. Von den Gleichungen des erſten Grades . . . . . §. 7—18.
Drittes Kapitel. Von der Auflöſung einiger hieher gehörigen Aufgaben . . §. 19—34.
Viertes Kapitel. Von der Auflöſung zweyer oder mehrerer Gleichungen vom erſten Grade §. 35—50.
Fünftes Kapitel. Von der Auflöſung der reinen quadratiſchen Gleichungen . . . . §. 51—64.
Sechstes Kapitel. Von der Auflöſung der vermiſchten quadratiſchen Gleichungen . §. 65—77.
Siebentes Kapitel. Von der Ausziehung der Wurzel aus vieleckigen Zahlen . . §. 78—90.
Achtes Kapitel. Von der Ausziehung der Quadratwurzel aus Binomien . . §. 91—109.
Neuntes Kapitel. Von der Natur der quadratiſchen Gleichungen . . . §. 110—126.
Zehntes Kapitel. Von der Auflöſung der reinen cubiſchen Gleichungen . . §. 127—139.
Eilftes Kapitel. Von der Auflöſung der vollſtändigen cubiſchen Gleichungen . . §. 140—153.
Zwölftes Kapitel. Von der Regel des Cardani §. 154—168.
Dreyzehntes Kapitel. Von der Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen . . §. 169—183.
Vierzehntes Kapitel. Von der Regel des Bombelli, die Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen auf cubiſche zu bringen . . . §. 184—190.
Funfzehntes Kapitel. Von einer neuen Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen . §. 191—199.
Sechszehntes Kapitel. Von der Auflöſung der Gleichungen durch Näherung . . §. 200—210.

Zweyter Abſchnitt.

Von der unbeſtimmten Analytik.

Erſtes Kapitel. Von der Auflöſung ſolcher einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt . . . §. 211—231.
Zweytes Kapitel. Von der ſogenannten Regula Coeci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen beſtimmt werden ſollen . §. 232—237.
Drittes Kapitel. Von den zuſammengeſetzten unbeſtimmten Gleichungen, worinnen von der einen unbekannten Zahl nur die erſte Poteſtät vorkömmt §. 238—244.
Viertes Kapitel. Von der Methode, irrationale Formeln von der Art wie $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ rational zu machen . . . §. 245—282.
Fünftes Kapitel. Von den Fällen in ganzen Zahlen, wo die Formel $axx+b$ ein Quadrat wird §. 283—296.
Sechstes Kapitel. Von einer beſondern Methode, die Formel $ann+1$ zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen . . §. 297—311.
Siebentes Kapitel. Von der Art, dieſe Irrationalformel $\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3)}$ rational zu machen §. 312—321.
Achtes Kapitel. Von der Methode, irrationale Formeln von der Art, wie $\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+dx^3)}$, rational zu machen . . . §. 322—335.
Neuntes Kapitel. Von der Auflöſung dieſer Formel $axx+bxy+cyy$ in Faktoren §. 336—354.
Zehntes Kapitel. Auflöſung einiger Aufgaben, die zu dieſem Theile der Analytik gehören §. 355—373.
Anhang. Vermiſchte Aufgaben ohne Auflöſung für Anfänger . . . . Seite 266.

Des

Zweyten Theils

Erſter Abſchnitt.

Von den algebraiſchen Gleichungen und derſelben Auflöſung.

Erſtes Kapitel.

Von der Auflöſung der algebraiſchen Aufgaben überhaupt.

§. 1.

Die Hauptbeſchäftigung in der Algebra, wie ſchon in dem erſten Abſchnitte des erſten Theils (§. 4. und 6.) bemerkt worden iſt, beſteht darinnen, daß man den Werth unbekannter Größen vermittelſt gewiſſer Gleichungen zu beſtimmen ſuche, welches aus genauer Erwägung der Bedingungen, die dabey vorgeſchrieben, und durch bekannte Größen ausgedrückt werden, geſchehen muß. Daher die Algebra auch eine Wiſſenſchaft genannt wird, welche lehrt, wie man aus bekannten Größen andere noch unbekannte durch Hülfe einer oder mehrerer Gleichungen ausfindig machen könne.

§. 2.

Bey einer jeden vorkommenden algebraiſchen Aufgabe wird, zur Vermeidung der Verwirrung, diejenige Zahl oder Größe, die geſucht werden ſoll, durch einen der letztern Buchſtaben, die gegebenen oder bekannten Größen aber mit den erſten Buchſtaben des Alphabets angedeutet, oder, wo ſichs thun läßt, durch gewöhnliche Zahlzeichen ausgedrückt, und dabey jede von den vorgeſchriebenen Bedingungen in Erwägung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwiſchen zwey Zahlen geführet wird. Aus einer ſolchen Gleichung muß hernach der Werth der geſuchten Zahl beſtimmt werden, wodurch die Aufgabe auf-

gelöſet wird. Bisweilen ſollen auch mehrere Zahlen *) geſucht werden, welches auf gleiche Weiſe durch Gleichungen geſchehen muß.

Dieſes wird durch folgendes Beyſpiel deutlicher werden.

Es zehren 20 Perſonen, Männer und Weiber, in einem Wirthshauſe; ein Mann verzehrt 8 Gr., ein Weib aber 7 Gr., und die ganze Zeche beläuft ſich auf 6 Rthl. Nun iſt die Frage: wie viel ſind Männer und Weiber daſelbſt geweſen?

Um dieſe Aufgabe aufzulöſen, ſo ſetze man die Zahl der Männer $= x$, und ſehe dieſelbe als bekannt an, oder man verfahre damit, als wenn man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geſchehe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ iſt, und Männer und Weiber zuſammen 20 Perſonen ausmachen, ſo kann man daraus die Anzahl der Weiber beſtimmen, welche gefunden wird, wenn man die Zahl der Männer von 20 ſubtrahirt. Folglich iſt hier die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. verzehrt, ſo werden x Männer verzehren $8x$ Groſchen.

Und weil ein Weib 7 Gr. verzehrt, ſo werden dieſe $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gr.

Alſo verzehren Männer und Weiber zuſammen $140 + x$ Gr. Wir wiſſen aber, wie viel ſie zuſammen verzehrt haben, nemlich 6 Rthl., welche, zu Groſchen gemacht, 144 Gr. ſind; daher erhalten wir dieſe Gleichung

---

*) Wenn aber gleich mehrere Zahlen geſucht werden ſollen, ſo hat man deswegen doch nicht allezeit nöthig, eben ſo viel Buchſtaben, als unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, zur Bezeichnung derſelben zu gebrauchen. In folgender Aufgabe z. B. iſt ſowohl die Anzahl der Männer, als auch die Anzahl der Weiber unbekannt, aber von dem Hrn. V. mit Recht nur der Buchſtabe x zur Bezeichnung der Anzahl der Männer gebraucht worden, weil ſich die Anzahl der Weiber durch $20 - x$ ausdrücken läßt.

$140 + x = 144$, woraus man leicht ſieht, wenn man auf beyden Seiten 140 ſubtrahirt, daß $x = 4$ ſeyn muß.

Es waren alſo bey der Zeche 4 Männer und $20 - 4$ d. i. 16 Weiber.

§. 3.

Bey allen Aufgaben kömmt es nun darauf an, daß, nachdem man die unbekannten Zahlen durch Buchſtaben angedeutet hat, die Umſtände der Frage genau in Erwägung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach beſteht die ganze Kunſt darin, durch die Auflöſung ſolcher Gleichungen den Werth der unbekannten Zahlen zu finden, und hiervon ſoll in dieſem Abſchnitte gehandelt werden.

§. 4.

Bey den Aufgaben ſelbſt ereignet ſich auch ein Unterſchied, indem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehrere geſucht werden ſollen, in welchem letztern Falle zu merken iſt, daß dazu auch eben ſo viel beſondere Gleichungen erfordert werden, welche aus den Umſtänden der Frage ſelbſt hergeleitet werden müſſen.

§. 5.

Eine Gleichung beſteht alſo aus zwey Sätzen, die einander gleich geſetzt werden. Um nun daraus den Werth der unbekannten Zahlen herauszubringen, müſſen öfters ſehr viele Verwandelungen angeſtellet werden, welche ſich aber alle darauf gründen, daß, wenn zwey Größen einander gleich ſind, dieſelben auch einander gleich bleiben, wenn man zu beyden einerley Größen addirt oder davon ſubtrahirt; ingleichen wenn dieſelben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ferner auch, wenn beyde zu einerley Poteſtäten erhoben, oder aus beyden gleichnamige Wurzeln ausgezogen; und endlich auch, wenn von beyden die Logarithmen genommen werden, wovon ſchon im erſten Theile Beyſpiele vorgekommen ſind.

§. 6.

Diejenigen Gleichungen, worinnen von der unbekannten Zahl nur die erſte Poteſtät vorkömmt, nachdem die Gleichung in Ordnung gebracht worden iſt, ſind am leichteſten aufzulöſen, und werden Gleichungen vom erſten Grade genannt. Hernach folgen ſolche Gleichungen, worinnen die zweyte Poteſtät oder das Quadrat der unbekannten Zahl vorkömmt; dieſe werden quadratiſche oder Gleichungen vom zweyten Grade genannt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grade, oder die cubiſchen, worinnen der Cubus der unbekannten Zahl vorkömmt, u. ſ. f., von welchen allen das Nöthigſte in dieſem Abſchnitte vorgetragen werden ſoll.

Zweytes Kapitel.

Von den Gleichungen des erſten Grades und ihrer Auflöſung.

§. 7.

Wenn die unbekannte oder geſuchte Zahl durch den Buchſtaben x angedeutet wird, und die herausgebrachte Gleichung, z. B. $x=25$, ſchon ſo beſchaffen iſt, daß der eine Satz blos allein das x, und der andere Satz eine bekannte Zahl enthält, ſo hat man ſchon wirklich den Werth von x, der verlangt wird, und auf dieſe Form muß man immer zu kommen trachten, ſo verwirrt auch die erſt gefundene Gleichung ſeyn mag, wozu die Regeln im folgenden gegeben werden ſollen.

§. 8.

Wir wollen bey den leichteſten Fällen anfangen, und erſtlich ſetzen, man ſey auf dieſe Gleichung gekommen:

$x + 9 = 16$, ſo ſieht man, daß, wenn man auf beyden Seiten 9 ſubtrahirt, $x = 7$ iſt.

Es ſey aber auf eine allgemeine Art $x + a = b$, wo a und b bekannte Zahlen andeuten, dieſelben mögen heißen, wie ſie wollen. Hier muß man alſo beyderſeits a ſubtrahiren, und da bekömmt man dieſe Gleichung: $x = b - a$, welche uns den Werth von x anzeigt.

§. 9.

Iſt die gefundene Gleichung $x - a = b$, ſo addire man beyderſeits a, wodurch man erhält $x = a + b$, welches der geſuchte Werth von x iſt.

Eben ſo verfährt man, wenn die erſte Gleichung folgendergeſtalt beſchaffen iſt: $x - a = aa + 1$; denn da wird $x = aa + a + 1$.

Aus der Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekömmt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$.

§. 10.

Bekömmt man folgende Gleichung: $x - a + b = c$, ſo kann man beyderſeits a addiren, wodurch man die neue Gleichung $x + b = c + a$ erhält. Subtrahirt man nun auf beyden Seiten b, ſo hat man $x = c + a - b$. Man kann aber zugleich beyderſeits $+ a - b$ addiren, ſo bekömmt man mit einmal $x = c + a - b$.

Aus dieſen Beyſpielen erhellet alſo folgende Regel: Iſt das Bekannte mit dem Unbekannten durch die Addition verbunden, ſo kann man es durch die Subtraction von ihm abſondern. Geſchieht aber dieſe Verbindung durch die Subtraction, ſo muß man zu der Abſonderung des Bekannten von dem Unbekannten die Addition gebrauchen.

§. 11.

Hat die gefundene Gleichung dieſe Geſtalt $ax = b$, ſo dividire man beyderſeits durch a, welches folgende

Gleichung giebt: $x = \frac{b}{a}$. Iſt aber die Gleichung $ax + b - c = d$, ſo muß man erſtlich dasjenige, was bey ax ſteht, wegbringen, welches hier dadurch geſchehen kann, wenn man auf beyden Seiten $-b + c$ addirt. Denn auf dieſe Weiſe erhält man $ax = d - b + c$; folglich $x = \frac{d - b + c}{a}$.

Oder man ſubtrahire beyderſeits $+b - c$, ſo bekömmt man $ax = d - b + c$ und $x = \frac{d - b + c}{a}$.

Es ſey $2x + 5 = 17$, ſo iſt $2x = 12$ und $x = 6$.

§. 12.

Iſt die Gleichung alſo beſchaffen $\frac{x}{a} = b$, ſo multiplicire man beyderſeits mit a, wodurch man $\frac{x}{a} \times a = ab$ d. i. $x = ab$ erhält.

Iſt nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, ſo wird erſtlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und $x = (d - b + c)a = ad - ab + ac$.

Es ſey $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, ſo wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.

§. 13.

Wäre die gefundene oder gegebene Gleichung $\frac{ax}{b} = c$, ſo multiplicire man beyderſeits mit b, und die dadurch erhaltene neue Gleichung $ax = bc$ dividire man durch a, ſo erhält man $x = \frac{bc}{a}$. Iſt aber $\frac{ax}{b} - c = d$, ſo wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$, und folglich $x = \frac{bd + bc}{a}$.

Es ſey $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, ſo wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$; folglich $x = \frac{15}{2}$, d. i. $7\frac{1}{2}$.

Hieraus läßt ſich alſo wiederum folgende Regel leicht einſehen: Iſt das Bekannte mit dem Unbekannten durch die Multiplication verbunden, ſo muß man das Product durch den bekannten Factor dividiren. Iſt aber das Unbekannte durch eine bekannte Größe dividirt, ſo muß man dieſen Quotienten durch den bekannten Diviſor multipliciren, um das Unbekannte auf der einen Seite allein zu bekommen.

§. 14.

Es kann auch geſchehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchſtaben x enthalten, und entweder in einem Satze, oder in beyden vorkommen. Sind ſie auf einer Seite, ſo können ſie zuſammengezogen und ein einziges Glied daraus gemacht werden. Z. B. aus $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$ wird auf dieſe Art $\frac{3}{2}x + 5 = 11$; hieraus ferner nach den obigen Regeln, wenn man 5 auf beyden Seiten ſubtrahirt, $\frac{3}{2}x = 6$, und wenn man dieſe Gleichung durch 2 multiplicirt, $3x = 12$; worauf man endlich durch die Diviſion mit 3 erhält $x = 4$.

Es ſey $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$, welches zuſammengezogen $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$ giebt.

Es ſey $ax - bx + cx = d$, ſo iſt dieſes eben ſo viel, als $(a - b + c)x = d$; hieraus kömmt $x = \frac{d}{a-b+c}$.

§. 15.

Steht aber x in beyden Sätzen, ſo muß x von der Seite, wo man am wenigſten hat, weggebracht werden. Z. B. in der Gleichung $3x + 2 = x + 10$ ſubtrahire man beyderſeits x, wodurch man erhält $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$; folglich $x = 4$.

Es ſey ferner $x + 4 = 20 - x$, alſo $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$; folglich $x = 8$.

§. 16.

Kömmt man auf eine ſolche Gleichung, wo die un-

bekannte Zahl x ſich im Nenner befindet, ſo muß der Bruch gehoben und die ganze Gleichung mit demſelben Nenner multiplicirt werden.

Es ſey z. B. $\frac{100}{x}-8=12$, ſo erhält man erſtlich, wenn man auf beyden Seiten 8 addirt, $\frac{100}{x}=20$.

Nun multiplicire man beyderſeits mit x, ſo hat man $100=20x$, und wenn man endlich beyde Sätze mit 20 dividirt, ſo erhält man die geſuchte Zahl $x=5$.

§. 17.

Bisweilen kommen auch Wurzelzeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem erſten Grade; z. B. wenn eine ſolche Zahl x unter 100 geſucht wird, ſo daß die Quadratwurzel aus $100-x$ der Zahl 8 gleiche, oder daß $\sqrt{}(100-x)=8$. In dieſem Falle nehme man beyderſeits die Quadrate $100-x=64$, ſo hat man, wenn x addirt wird, $100=64+x$. Subtrahirt man nun auf beyden Seiten 64, ſo erhält man $x=36$. Man könnte aber auch x folgendergeſtalt finden. Da $100-x=64$, ſo ſubtrahire man 100, und man bekömmt $-x=-36$; dieſes mit -1 multiplicirt, giebt $x=36$.

§. 18.

Es giebt auch Fälle, wo die unbekannte Zahl x als der Exponent einer Dignität erſcheint, dergleichen Beyſpiele ſchon im erſten Theile §. 181. vorgekommen ſind, und da muß man ſeine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Z. B. wenn man zu wiſſen verlangt, zu welcher Potenz man die Zahl 2 erheben müſſe, um die Zahl 512 zu erhalten, ſo bekömmt man die Gleichung $2^x=512$. Nimmt man nun auf beyden Seiten die Logarithmen, ſo hat man $x\,\log.2=\log.512$, und dividirt man durch $\log.2$, ſo wird $x=\frac{\log.512}{\log.2}$. Nun iſt nach den Tabellen

$$x=\frac{2,7092700}{0,3010300}=\frac{27092700}{3010300}=9.$$

Hieraus iſt klar, daß man die Zahl 2 zur neunten Dignität erheben muß, um die Zahl 512 zu erhalten.

Drittes Kapitel.

Von der Auflöſung einiger hierher gehörigen leichten Aufgaben.

---

§. 19.

I. Aufg. Zertheile 7 in zwey Theile, ſo daß der eine um 3 größer ſey, als der andere Theil.

Es ſey der größere Theil $=x$, ſo wird der kleinere ſeyn $7-x$; daher muß $x=7-x+3$ oder $x=10-x$ ſeyn. Man addire x, ſo erhält man $2x=10$, und dividire endlich durch 2, ſo wird $x=5$.

Der größere Theil iſt alſo 5, und der kleinere 2.

Dieſe und alle ähnliche Aufgaben könnte man folgendergeſtalt ganz allgemein ausdrücken. Man zertheile a in zwey Theile, ſo daß der größere um b größer ſey als der kleinere.

Es ſey der größere Theil x, ſo iſt der kleinere $a-x$; daher wird $x=a-x+b$. Man addire x, ſo wird $2x=a+b$, und dividire durch 2, ſo erhält man $x=\frac{a+b}{2}$.

Setzt man nun, nach der vorigen Aufgabe, $a=7$ und $b=3$, ſo iſt, wie vorhin, $x=\frac{7+3}{2}=5$.

Eine andere Auflöſung. Es ſey der größere Theil $=x$. Weil nun derſelbe um b größer iſt als der kleinere, ſo iſt hinwiederum der kleinere um b kleiner, als der größere; daher wird der kleinere Theil $x-b$. Dieſe beyde Theile zuſammen müſſen a ausmachen; daher bekömmt man $2x-b=a$. Man addire b, ſo erhält man

$2x = a + b$; folglich $x = \frac{a+b}{2}$, welches der größere Theil iſt, und der kleinere wird $\frac{a+b}{2} - b$ oder $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$ ſeyn.

§. 20.

II. Aufgabe: Ein Vater hinterläßt ſeinen drey Söhnen ein Vermögen von 1600 Thalern. Nach ſeinem Teſtamente ſoll der älteſte Sohn 200 Rthlr. mehr haben, als der zweyte; der zweyte aber 100 Rthlr. mehr, als der dritte. Wie viel bekömmt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten ſey $= x$, ſo iſt das Erbtheil des zweyten $= x + 100$, und das Erbtheil des erſten $= x + 300$. Dieſe 3 zuſammen müſſen 1600 Rthlr. machen. Daher wird $3x + 400 = 1600$. Man ſubtrahire 400, ſo wird $3x = 1200$, und durch 3 dividirt, giebt $x = 400$.

Der dritte Sohn bekömmt alſo 400 Rthl., der zweyte 500 Rthl., und der erſte 700 Rthl.

§. 21.

III. Aufgabe: Ein Vater hinterläßt vier Söhne und 8600 Rthl. Vermögen. Nach ſeinem Teſtamente ſoll der erſte zweymal ſo viel bekommen, als der zweyte, weniger 100 Rthl. Der zweyte ſoll dreymal ſo viel bekommen, als der dritte, weniger 200 Rthl., und der dritte ſoll viermal ſo viel haben, als der vierte, weniger 300 Rthl. Wie viel bekömmt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten ſey $= x$, ſo iſt das Erbtheil des dritten $4x - 300$, des zweyten $12x - 1100$, und des erſten $24x - 2300$. Hiervon muß die Summe 8600 Rthl. ausmachen, woraus dieſe Gleichung entſteht: $41x - 3700 = 8600$. Man addire 3700, ſo bekömmt man $41x = 12300$; und durch 41 dividirt, giebt $x = 300$.

Der vierte Sohn bekömmt alſo 300 Rthl., der dritte 900 Rthl., der zweyte 2500 Rthl., und der erſte 4900 Rthl.

§. 22.

IV. Aufgabe: Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlaſſene Vermögen folgendergeſtalt unter ſich theilen. Der erſte bekömmt 1000 Rthl. weniger, als die Hälfte von der ganzen Verlaſſenſchaft; der zweyte 800 Rthl. weniger, als der dritte Theil der Verlaſſenſchaft, und der vierte 600 Rthl. weniger, als der vierte Theil der Verlaſſenſchaft. Nun iſt die Frage: wie groß iſt die Verlaſſenſchaft geweſen, und wie viel hat ein jeder bekommen?

Es ſey die ganze Verlaſſenſchaft $= x$

ſo hat der erſte Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zuſammen haben alſo bekommen: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$, welches der ganzen Verlaſſenſchaft x gleich geſetzt werden muß; woraus dieſe Gleichung entſteht, wenn man die Brüche $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$ zuſammen addirt: $\frac{13}{12}x - 2400 = x$.

Man ſubtrahire $x = \frac{12}{12}x$, ſo hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$.

Man addire 2400, ſo iſt $\frac{1}{12}x = 2400$,

und mit 12 multiplicirt giebt $x = 28800$.

Folglich war die ganze Verlaſſenſchaft 28800 Rthl.

Hiervon hat nun bekommen

der erſte Sohn	13400 Rthlr.
der zweyte	8800
der dritte	6600
alle drey alſo zuſammen	28800 Rthl.

§. 23.

V. Aufgabe: Man ſuche eine Zahl von der Beſchaffenheit, daß, wenn ich darzu ihre Hälfte addire, ſo viel über 60 herauskomme, als die Zahl ſelbſt unter 65 iſt.

Die Zahl ſey x, ſo muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ ſo viel ſeyn, als $65 - x$ d. i.

$$\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x.$$

Man addire x, ſo hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$.
Man addire 60, ſo iſt $\frac{5}{2}x = 125$.
Durch 5 dividirt wird $\frac{1}{2}x = 25$
und mit 2 multiplicirt giebt $x = 50$.

Die geſuchte Zahl iſt alſo 50.

§. 24.

VI. Aufgabe: Man zertheile 32 in zwey ungleiche Theile, und zwar dergeſtalt, daß, wenn ich den kleinern durch 6, den größern aber durch 5 dividire, die Quotienten zuſammen 6 ausmachen.

Es ſey der kleinere Theil $= x$, ſo iſt der größere $= 32 - x$. Der kleinere durch 6 dividirt giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$. Folglich muß ſeyn $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$.

Mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$.
Man addire $\frac{1}{6}x$, ſo kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$
und 30 ſubtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$.
Mit 6 nunmehr multiplicirt wird $x = 12$.

Der kleinere Theil iſt alſo 12, und der größere 20.

§. 25.

VII. Aufgabe: Zertheile 25 in zwey Theile, ſo daß der größere 49mal größer iſt, als der kleinere.

Es ſey der kleinere Theil $= x$, ſo iſt der größere $= 25 - x$; und weil dieſer 49mal größer ſeyn ſoll, als jener, ſo iſt $25 - x = 49x$.
Wird nun x auf beyden Seiten addirt, ſo erhält man

$$50x = 25,$$

und durch die Diviſion mit 50

$x = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$.

Folglich iſt der geſuchte kleinere Theil $\frac{1}{2}$, und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher, durch $\frac{1}{2}$ dividirt, d. i. mit 2 multiplicirt, 49 giebt.

§. 26.

VIII. Aufgabe. Zertheile 48 in neun Theile, ſo daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer ſey, als der vorhergehende.

Es ſey der erſte und kleinſte Theil $= x$, ſo iſt der zweyte $x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ ꝛc. Weil nun dieſe Theile eine arithmetiſche Progreſſion ausmachen, wovon das erſte Glied $= x$; ſo iſt das neunte und letzte Glied $x + 4$ (1. Th. §. 305.), wozu das erſte x addirt $2x + 4$ giebt. Dieſe Summe mit der Anzahl der Glieder 9 multiplicirt, giebt $18x + 36$; und dieſes durch 2 getheilt, giebt die Summe aller neun Theile $9x + 18$ (1. Th. §. 314.), welche der Zahl 48 gleich ſeyn muß. Alſo hat man $9x + 18 = 48$, und hiervon 18 ſubtrahirt wird $9x = 30$.

Endlich durch 9 dividirt giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Der erſte Theil iſt alſo $3\frac{1}{3}$, und die neun Theile ſind folgende:

$$3\tfrac{1}{3} + 3\tfrac{5}{6} + 4\tfrac{1}{3} + 4\tfrac{5}{6} + 5\tfrac{1}{3} + 5\tfrac{5}{6} + 6\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{5}{6} + 7\tfrac{1}{3}.$$

Die Summe von dieſen 9 Zahlen beträgt 48.

§. 27.

IX. Aufgabe: Suche eine arithmetiſche Progreſſion, wovon das erſte Glied $= 5$, und das letzte $= 10$, die Summe aber $= 60$ iſt.

Weil hier weder der Unterſchied, noch die Anzahl der Glieder bekannt iſt, aus dem erſten und letzten aber die Summe aller gefunden werden könnte, wenn man nur die Anzahl der Glieder wüßte (1. Th. §. 314.), ſo ſey dieſelbe $= x$. Folglich wird die Summe der Progreſſion ſeyn $(5 + 10) \times \frac{1}{2}x$ oder $15 \times \frac{1}{2}x = 60$. Dividirt man auf beyden Seiten mit 15, ſo erhält man $\frac{1}{2}x = 4$, und mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die

Anzahl der Glieder 8 iſt, ſo ſetze man den Unterſchied $=z$; folglich iſt das zweyte Glied $5+z$, das dritte $5+2z$, und das achte $5+7z$, welches, zufolge der angenommenen Bedingung, 10 betragen muß.

Alſo hat man $5+7z=10$.

Hiervon 5 ſubtrahirt, giebt $7z=5$

und durch 7 dividirt $z=\frac{5}{7}$.

Der Unterſchied der Progreſſion iſt alſo $\frac{5}{7}$, und die Anzahl der Glieder 8; daher die Progreſſion ſelbſt ſeyn wird:

$$5+5\tfrac{5}{7}+6\tfrac{3}{7}+7\tfrac{1}{7}+7\tfrac{6}{7}+8\tfrac{4}{7}+9\tfrac{2}{7}+10$$

wovon die Summe $=60$ iſt.

§. 28.

X. Aufgabe: Suche eine Zahl von der Beſchaffenheit, daß, wenn ich von ihrem Zweyfachen 1 ſubtrahire, und das Uebrige verdopple, davon 2 ſubtrahire, den Reſt durch 4 dividire, 1 weniger herauskomme, als die geſuchte Zahl.

Die geſuchte Zahl ſey x, ſo iſt ihr Zweyfaches $2x$, davon 1 ſubtrahirt, bleibt $2x-1$, dieſes verdoppelt wird $4x-2$, davon 2 ſubtrahirt, bleibt $4x-4$, und dieſes durch 4 dividirt, giebt $x-1$, welches 1 weniger ſeyn muß als x.

Alſo $x-1=x-1$. Dieſes iſt eine identiſche Gleichung, und zeiget an, daß x gar nicht beſtimmt werde, ſondern daß man dafür eine jegliche Zahl nach Belieben annehmen könne.

§. 29.

XI. Aufgabe: Es hat jemand etliche Ellen Tuch gekauft, und für jede 5 Ellen 7 Rthl. gegeben. Er hat hierauf das Tuch wieder verkauft, nemlich jede 7 Ellen für 11 Rthl., und gewonnen 100 Rthl. Wie viel iſt des Tuchs geweſen?

Zuerſt müſſen wir ſehen, wie viel dieſe Ellen Tuch, die wir durch x andeuten wollen, im Einkauf gekoſtet

haben, welches durch folgende Regeldetri gefunden wird:

5 Ellen koſten 7 Rthl., was koſten x Ellen?

Antwort: $\frac{7 \times x}{5}$ Rthl.

So viel Geld hat der Käufer ausgegeben. Nun laßt uns ſehen, wie viel er wieder eingenommen habe; dieſes geſchieht durch folgende Regeldetri:

7 Ellen koſten 11 Rthl., was koſten x Ellen?

Antwort: $\frac{11 \times x}{7}$ Rthl.

Dieſes iſt alſo die Einnahme, welche um 100 Rthl. größer iſt, als die Ausgabe, woraus dieſe Gleichung entſpringt:

$$\frac{11x}{7} = \frac{7x}{5} + 100.$$

Auf beyden Seiten $\frac{7x}{5}$ ſubtrahirt, bleibt $\frac{6x}{35} = 100$.

Mit 35 multiplicirt, kömmt $6x = 3500$ heraus, und dieſes durch 6 dividirt, wird $x = 583\frac{1}{3}$.

Es waren alſo $583\frac{1}{3}$ Ellen Tuch, welche erſtlich für $816\frac{2}{3}$ Rthl. eingekauft worden, hernach wieder für $916\frac{2}{3}$ Rthl. verkauft worden ſind; folglich iſt darauf gewonnen worden 100 Rthl.

§. 30.

XII. Aufgabe: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthl., und zwar 2 weiße, 3 ſchwarze und 7 blaue. Ein Stück ſchwarzes Tuch koſtet 2 Rthl. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rthl. mehr als ein ſchwarzes. Nun iſt die Frage, wie viel jedes gekoſtet?

Man ſetze, ein weißes Stück koſte x Rthl., ſo koſten die zwey weißen Stücke 2x Rthl., und ein ſchwarzes Stück koſtet $x + 2$; alſo die drey ſchwarzen $3x + 6$, und ein blaues Stück $x + 5$; folglich die 7 blauen $7x + 35$, und alle zwölf Stücke $12x + 41$.

Dieſelben koſten aber wirklich 140 Rthl.

Daher hat man $12x + 41 = 140$.

Hiervon 41 ſubtrahirt, bleibt $12x = 99$

und durch 12 dividirt wird $x = 8\frac{1}{4}$.

Ein weißes Stück koſtet alſo $8\frac{1}{4}$ Rthl.
ein ſchwarzes ; ; ; ; $10\frac{1}{4}$ Rthl.
ein blaues ; ; ; ; ; $13\frac{1}{4}$ Rthl.

§. 31.

XIII. Aufgabe: Einer hat Muſcaten-Nüſſe gekauft, und ſagt, daß 3 Stück eben ſo viel über 4 Pf. koſten, als 4 Stück mehr koſten als 10 Pf. Wie theuer waren dieſelben?

Man ſage: 3 Stücke koſten $x + 4$ Pf., ſo werden 4 Stücke $x + 10$ Pf. koſten. Nun aber, nach dem erſten Satze, findet man durch die Regeldetri, was 4 Stück koſten:

$$3 \text{ Stück} : x + 4 \text{ Pf.} = 4 \text{ Stück} : \frac{4x + 16}{3}$$

Folglich wird $\frac{4x+16}{3} = x + 10$ oder, wenn man, um den Bruch wegzuſchaffen, mit dem Nenner 3 auf beyden Seiten multiplicirt, $4x + 16 = 3x + 30$.
Hiervon $3x + 16$ ſubtrahirt giebt $x = 14$.

Es koſten alſo 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. Folglich hat ein Stück 6 Pf. gekoſtet.

§. 32.

XIV. Aufgabe: Einer hat zwey ſilberne Becher nebſt einem Deckel dazu. Der erſte Becher wiegt 12 Loth; legt man den Deckel darauf, ſo wiegt er zweymal ſo viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, ſo wiegt er dreymal ſo viel als der erſte. Hier iſt nun die Frage: wie viel wiegt der Deckel und der andere Becher?

Man ſetze, der Deckel habe gewogen x Loth, ſo wiegt der erſte Becher ſammt dem Deckel $x + 12$ Loth. Da dieſes Gewicht zweymal ſo groß iſt, als des andern Bechers, ſo hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x + 6$. Legt man darauf den Deckel, ſo wiegt er $\frac{3}{2}x + 6$, welches 3mal 12, d. i. 36 gleich ſeyn muß. Alſo hat man $\frac{3}{2}x + 6 = 36$, oder,

wenn man auf beyden Seiten 6 ſubtrahirt, $\frac{3}{2}x = 30$; folglich $\frac{1}{2}x = 10$ und $x = 20$.

Der Deckel hat daher gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

§. 33.

XV. Aufgabe: Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der erſten Sorte gehen a Stück auf einen Rthl., und von der zweyten Sorte b Stück. Nun kömmt einer, und will c Stück für einen Rthl. haben; wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man ſetze: der Wechsler gebe von der erſten Sorte x Stück, und alſo von der andern $c - x$ Stück. Nun ſind aber jene x Stücke $\frac{x}{a}$ Rthl. werth; denn $a : 1 = x : \frac{x}{a}$ Rthl. Dieſe $c - x$ Stücke aber ſind $\frac{c-x}{b}$ Rthl. werth; weil $b : 1 = c - x : \frac{c-x}{b}$ Rthl.

Alſo muß ſeyn $\frac{x}{a} + \frac{c-x}{b} = 1$, oder, wenn man mit b beyderſeits multiplicirt, $\frac{bx}{a} + c - x = b$, oder wenn man ferner mit a multiplicirt, $bx + ac - ax = ab$, und daher, wenn ac ſubtrahirt wird, $bx - ax = (b-a)x = ab - ac$. Folglich wird $x = \frac{ab - ac}{b - a}$ oder $x = \frac{a(b-c)}{b-a}$, und daher iſt $c - x = \frac{bc - ab}{b - a} = \frac{b(c-a)}{b-a}$.

Von der erſten Sorte giebt alſo der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ St.

Anmerkung. Dieſe beyden Zahlen laſſen ſich leicht durch die Regeldetri finden; nemlich die erſte durch folgende Proportion: $b - a : b - c = a : \frac{ab - ac}{b - a}$. Für die zweyte Zahl gilt dieſe: $b - a : c - a = b : \frac{bc - ab}{b - a}$. Hier-

bey iſt zu merken, daß b größer iſt als a, und c kleiner als b, aber größer als a, wie die Natur der Sache erfordert.

Zur Erläuterung dieſer allgemeinen Aufgabe kann folgendes Beyſpiel dienen.

Ein Wechsler hat zweyerley Münze; von der erſten gelten 10 Stück einen Rthl., von der andern 20 Stück einen Rthl. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthl., wie viel bekömmt er von jeder Sorte?

Hier iſt alſo $a = 10$, $b = 20$ und $c = 17$.

Folglich $\frac{ab - ac}{b - a} = \frac{10 \times 20 - 10 \times 17}{20 - 10} = \frac{30}{10} = 3$,

und $\frac{bc - ab}{b - a} = \frac{17 \times 20 - 10 \times 20}{20 - 10} = \frac{140}{10} = 14$.

Von der erſten Sorte muß alſo der Wechsler 3, und von der zweyten Sorte 14 Stück geben. Die Richtigkeit dieſer Auflöſung läßt ſich auch durch die Probe beſtätigen. Denn da von der erſten Münzſorte 10 Stück einen Thaler gelten, ſo muß der Werth von 3 Stück $\frac{3}{10}$ Thaler betragen, und da von der andern Sorte 20 Stück einen Thaler ausmachen, ſo iſt der Werth von 14 Stück $= \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ Thaler. Folglich $\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{10}{10} = 1$ Thaler.

§. 34.

XVI. Aufgabe: Ein Vater verläßt nach ſeinem Tode einige Kinder, die ſein Vermögen folgendergeſtalt unter ſich theilen. Das erſte nimmt 100 Rthlr., und dazu noch den 10ten Theil des übrigen. Das zweyte nimmt 200 Rthl., und noch dazu den 10ten Theil des übrigen. Das dritte nimmt 300 Rthl., und noch dazu den 10ten Theil des übrigen. Das vierte nimmt 400 Rthl., und noch dazu den 10ten Theil des übrigen, u. ſ. f. Am Ende findet es ſich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun iſt die Frage, wie groß das Vermögen geweſen ſey, wie viel Kinder der Vater hinterlaſſen, und wie viel ein jedes bekommen habe?

Dieſe Frage iſt von einer ganz beſondern Art, und verdienet deswegen bemerkt zu werden. Um dieſelbe deſto leichter aufzulöſen, ſo ſetze man das ganze hinterlaſſene Vermögen $= z$ Rthl., und weil alle Kinder gleich viel bekommen, ſo ſey das Antheil eines jeden $= x$; woraus man ſieht, daß die Anzahl der Kinder $\frac{z}{x}$ betrage. Hieraus wollen wir die Auflöſung folgendergeſtalt anſtellen:

Die Maſſe oder das zu theilende Vermögen.	Ordnung der Kinder.	der Antheil eines jeden.
z	das erſte	$x = 100 + \frac{z - 100}{10}$
$z - x$	zweyte	$x = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$
$z - 2x$	dritte	$x = 300 + \frac{z - 2x - 300}{10}$
$z - 3x$	vierte	$x = 400 + \frac{z - 3x - 400}{10}$
$z - 4x$	fünfte	$x = 500 + \frac{z - 4x - 500}{10}$
$z - 5x$	ſechſte	$x = 600 + \frac{z - 5x - 600}{10}$

Weil nun alle Erbtheile einander gleich ſind, ſo iſt auch

$$100 + \frac{z - 100}{10} = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$$

und wenn man auf beyden Seiten, um den Bruch wegzuſchaffen, mit 10 multiplicirt,

$$1000 + z - 100 = 2000 + z - x - 200$$

d. i. $900 + z = 1800 + z - x$.

Wird nun z ſubtrahirt, und x addirt, ſo erhält man

$$x + 900 = 1800$$

Folglich, wenn man 900 noch abzieht,

$$x = 900.$$

Hieraus erhellet, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthl. geweſen iſt. Man nehme nun eine von den Gleichungen der dritten Columne, welche man will, z. B. die erſte, und ſetze fuͤr x die gefundene Zahl 900, ſo wird $900 = 100 + \frac{z - 100}{10}$, woraus man z ſogleich finden kann. Denn, wenn man auf beyden Seiten mit dem Nenner des Bruchs, nemlich mit 10, multiplicirt, ſo erhaͤlt man die Gleichung $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$; alſo $z = 8100$, und daher $\frac{z}{x} = \frac{8100}{900} = 9$.

Folglich war die Anzahl der Kinder $= 9$, und das hinterlaſſene Vermoͤgen $= 8100$ Rthl., wovon ein jedes Kind 900 Rthl. erhielt.

Dieſe Aufgabe laͤßt ſich auch durch Huͤlfe der Differenzen aufloͤſen, die man erhaͤlt, wenn man das eine Erbtheil von dem andern abzieht. Denn wegen der Gleichheit aller Erbtheile muͤſſen alle dieſe Differenzen $= 0$ ſeyn. Ziehe ich nun z. B. das erſte Erbtheil von dem zweyten ab, ſo erhalte ich $100 - \frac{x - 100}{10}$ und alſo die Gleichung $100 - \frac{x - 100}{10} = 0$. Wird dieſe Gleichung mit 10 multiplicirt, ſo bekoͤmmt man $1000 - x - 100 = 0$, folglich $1000 - 100 = x$, d. i. $900 = x$, wie vorhin.

Viertes Kapitel.

Von der Auflöſung zweyer oder mehrerer Gleichungen vom erſten Grade.

§. 35.

Oft geſchieht es, daß zwey oder auch mehr unbekannte Zahlen, welche durch die Buchſtaben x, y, z ꝛc. vorgeſtellt werden, in die Rechnung gebracht werden müſſen, da man denn, wenn anders die Frage beſtimmt iſt, auf eben ſo viel Gleichungen kömmt, aus welchen hernach die unbekannten Zahlen gefunden werden können. Hier betrachten wir aber blos ſolche Gleichungen, wo nur die erſte Potestät der unbekannten Zahl ſich findet, und auch keine mit der andern multiplicirt iſt. Alſo daß eine jede Gleichung von dieſer Form ſeyn wird: $az + by + cx = d$.

§. 36.

Wir wollen alſo den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekannte Zahlen x und y beſtimmen; und um die Sache auf eine allgemeine Art zu behandeln, ſo wollen wir folgende zwey Gleichungen als gegeben annehmen: I.) $ax + by = c$ und II.) $fx + gy = h$, wo die Buchſtaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekannter Zahlen vertreten. Hier iſt nun die Frage, wie man aus dieſen beyden Gleichungen die beyden unbekannten Zahlen x und y herausbringen könne.

§. 37.

Der natürlichſte Weg beſtehet nun darin, daß man aus einer jeden Gleichung den Werth von einer unbekannten Zahl, z. B. von x, beſtimmt, und hernach dieſe beyde Werthe einander gleich ſetzt; woraus man eine Gleichung erhält, in welcher nur eine unbekannte Zahl, nemlich y, vorkommt, die man nach den obigen Regeln beſtimmen kann. Hat man nun y gefunden, ſo darf man

nur anſtatt deſſelben ſeinen gefundenen Werth ſetzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

Dieſer Regel zufolge findet man aus der erſten Gleichung $x = \frac{c - by}{a}$, aus der andern aber $x = \frac{h - gy}{f}$. Dieſe beyden Werthe ſetze man einander gleich, ſo erhält man dieſe neue Gleichung $\frac{c - by}{a} = \frac{h - gy}{f}$.

Mit a multiplicirt, wird $c - by = \frac{ah - agy}{f}$.

Ferner mit f multiplicirt, giebt $fc - fby = ah - agy$.
Man addire agy, ſo wird $fc - fby + agy = ah$.
Man ſubtrahire fc, ſo wird $-fby + agy = ah - fc$ oder $(ag - bf)y = ah - fc$.

Man dividire durch $ag - bf$, ſo wird $y = \frac{ah - fc}{ag - bf}$.
Schreibt man nun dieſen Werth für y in eine der beyden Gleichungen, die für x gefunden worden, z. B. in die erſte $x = \frac{c - by}{a}$, ſo erhält man auch den Werth von x. Denn da $y = \frac{ah - fc}{ag - bf}$, ſo hat man erſtlich $-by = -\frac{abh + bcf}{ag - bf}$.

Hieraus wird $c - by = c - \frac{abh + bcf}{ag - bf}$,

oder $c - by = \frac{acg - bcf - abh + bcf}{ag - bf} = \frac{acg - abh}{ag - bf}$.

Durch a dividirt giebt $\frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf} = x$.

Folgendes Beyſpiel wird zur Erläuterung dieſer allgemeinen Regeln dienen.

§. 38.

I. Aufgabe: Man ſuche zwey Zahlen, deren Summe 15, die Differenz aber 7 iſt.

Es ſey die größere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$, ſo hat man I.) $x + y = 15$, und II.) $x - y = 7$.
Aus der erſten bekömmt man $x = 15 - y$
und aus der zweyten $x = 7 + y$,
woraus dieſe neue Gleichung entſpringt $15 - y = 7 + y$ *).
Hier addire man y, ſo hat man $15 = 7 + 2y$.
Man ſubtrahire 7, ſo wird $8 = 2y$.
Durch 2 dividirt wird $4 = y$.

Wenn man nun in der obigen Gleichung $x = 7 + y$ anſtatt y die gefundene Zahl 4 ſetzt, ſo erhält man $x = 7 + 4 = 11$. Die kleinere Zahl iſt alſo 4 und die größere 11.

Man kann dieſe Aufgabe auch noch auf eine kürzere Art, nemlich durch eine Gleichung, auflöſen. Denn da die Differenz bekannt iſt, und die kleinere Zahl y heißt, ſo wird die größere $y + 7$, und die Summe beyder $y + y + 7$, d. i. $2y + 7$; folglich $15 = 2y + 7$, und, wenn man 7 ſubtrahirt, $8 = 2y$, oder $4 = y$ ſeyn.

§. 39.

Man kann dieſe Aufgabe auch allgemein machen und zwey Zahlen ſuchen, deren Summe $= a$ und deren Differenz $= b$ ſey.

Es ſey die größere $= x$ und die kleinere y, ſo hat man I.) $x + y = a$ und II.) $x - y = b$.
Aus der erſten erhält man $x = a - y$,
und aus der zweyten $x = b + y$,
woraus dieſe Gleichung entſpringt $a - y = b + y$.
Man addire y, ſo hat man $a = b + 2y$.
Man ſubtrahire b, ſo kömmt $2y = a - b$.
Durch 2 dividirt wird $y = \frac{a-b}{2}$,
und hieraus wird $x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

*) Es wird nemlich hier, wie in dem vorigen §., nach dem bekannten Grundſatze geſchloſſen: Wenn zwey Größen einer dritten gleich ſind, ſo müſſen ſie einander ſelbſt gleich ſeyn.

Die größere Zahl iſt alſo $x = \frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y = \frac{a-b}{2}$; oder da $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, ſo erhält man dieſen Lehrſatz: die größere Zahl iſt gleich der halben Summe und der halben Differenz zuſammen genommen; die kleinere Zahl aber iſt gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

Man kann dieſe Aufgabe auch auf folgende Weiſe auflöſen. Denn wenn man die beyden Gleichungen $x + y = a$ und $x - y = b$ addirt, ſo wird $2x = a + b$ und $x = \frac{a+b}{2}$.

Wenn man ferner von der erſten die zweyte Gleichung ſubtrahirt, ſo bekömmt man $2y = a - b$ und $y = \frac{a-b}{2}$, wie vorher.

§. 40.

II. **Aufgabe:** Ein Mauleſel und ein Eſel tragen ein jeder einige Pud *). Der Eſel beſchwert ſich über ſeine Laſt und ſagt zum Mauleſel: wenn du mir ein Pud von deiner Laſt gäbeſt, ſo hätte ich zweymal ſo viel als du. Hierauf antwortet der Mauleſel: wenn du mir ein Pud von deiner Laſt gäbeſt, ſo hätte ich dreymal ſo viel als du. Wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Mauleſel habe gehabt x Pud, der Eſel aber y Pud. Giebt nun der Mauleſel dem Eſel ein Pud, ſo hat der Eſel $y + 1$, der Mauleſel aber behält noch $x - 1$. Da nun der Eſel zweymal ſo viel hat, als der Mauleſel, ſo wird $y + 1 = 2x - 2$.

Wenn aber der Eſel dem Mauleſel ein Pud giebt, ſo bekömmt der Mauleſel $x + 1$, und der Eſel behält noch

*) Ein Pud iſt ein in Rußland übliches Gewicht, und beträgt vierzig Pfund.

$y - 1$. Da nun jene Laſt dreymal ſo groß iſt, als dieſe, ſo wird $x + 1 = 3y - 3$.

Alſo ſind unſere zwey Gleichungen:
I.) $y + 1 = 2x - 2$ und II.) $x + 1 = 3y - 3$.
Aus der erſten findet man $x = \frac{y+3}{2}$,
und aus der andern $x = 3y - 4$,
woraus dieſe neue Gleichung entſpringt $\frac{y+3}{2} = 3y - 4$,
welche mit 2 multiplicirt $y + 3 = 6y - 8$ giebt.
Subtrahirt man nun y, ſo erhält man $5y - 8 = 3$.
Addirt man 8, ſo hat man $5y = 11$ und $y = \frac{11}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$.
Folglich wird, weil $x = 3y - 4$,
wenn man hier anſtatt y die Zahl $2\frac{1}{5}$ oder $\frac{11}{5}$ ſetzt,

$$x = \frac{33}{5} - 4 = 2\frac{3}{5}.$$

Alſo hat der Mauleſel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud, der Eſel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

§. 41.

Hat man drey unbekannte Zahlen, und eben ſo viel Gleichungen, z. B. I.) $x + y - z = 8$, II.) $x + z - y = 9$, III.) $y + z - x = 10$, ſo ſuche man ebenfalls aus einer jeden den Werth von x, nemlich

aus der I.) $x = 8 + z - y$, II.) $x = 9 + y - z$,
III.) $x = y + z - 10$.

Nun vergleiche man den erſten Werth mit dem zweyten, und hierauf auch mit dem dritten, ſo erhält man dieſe zwey neue Gleichungen:

I.) $8 + z - y = 9 + y - z$, II.) $8 + z - y = y + z - 10$.

Es folgt aber aus der erſten $2z - 2y = 1$, und aus der zweyten $2y = 18$, und da erhält man ſogleich $y = 9$, welcher Werth in der vorhergehenden anſtatt y geſchrieben, giebt $2z - 18 = 1$ und $2z = 19$; daher $z = 9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x = 8\frac{1}{2}$.

Hier hat es ſich gefüget, daß in der zweyten Gleichung der Buchſtabe z verſchwunden iſt, und alſo y ſogleich daraus beſtimmt werden konnte. Wäre aber z auch

noch darinnen vorgekommen, ſo hätte man zwey Gleichungen gehabt zwiſchen z und y, welche nach der erſten Regel hätten aufgelöſt werden müſſen.

§. 42.

Es ſeyen die drey folgenden Gleichungen gefunden worden:

I.) $3x+5y-4z=25$, II.) $5x-2y+3z=46$,

III.) $3y+5z-x=62$.

Man ſuche aus einer jeden den Werth von x, ſo hat man I.) $x=\frac{25-5y+4z}{3}$, II.) $x=\frac{46+2y-3z}{5}$,

III.) $x=3y+5z-62$.

Nun vergleiche man dieſe drey Werthe unter ſich, ſo giebt der IIIte und Ite $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$ oder mit 3 multiplicirt $25-5y+4z=9y+15z-186$. Addirt man 186, ſo kömmt $211-5y+4z=9y+15z$, und wiederum 5y addirt, giebt $211+4z=14y+15z$. Man erhält alſo aus I und III $211=14y+11z$.

Die IIte und IIIte giebt $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$ oder $46+2y-3z=15y+25z-310$, und aus dieſer Gleichung findet man $356=13y+28z$. Aus einer jeden dieſer beyden Gleichungen ſuche man den Werth für y.

I.) $211=14y+11z$, und wird 11z ſubtrahirt, ſo bleibt $14y=211-11z$ oder $y=\frac{211-11z}{14}$.

II.) $356=13y+28z$, wo 28z ſubtrahirt, übrig läßt $13y=356-28z$ oder $y=\frac{356-28z}{13}$.

Dieſe zwey Werthe einander gleich geſetzt, geben: $\frac{211-11z}{14}=\frac{356-28z}{13}$, und mit 13.14 multiplicirt wird $2743-143z=4984-392z$,

hierzu $392z$ addirt, giebt $249z + 2743 = 4984$, oder $249z = 2241$ und alſo $z = 9$.

Hieraus erhält man $y = 9$ und endlich $x = 7$.

§. 43.

Sollten mehr als drey unbekannte Zahlen, und eben ſo viel Gleichungen vorkommen, ſo könnte man die Auflöſung auf eine ähnliche Art anſtellen, welches gemeiniglich auf verdrüßliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen ſich aber bey einem jeden Falle ſolche Mittel zu äußern, wodurch die Auflöſung ungemein erleichtert wird, und ſolches geſchieht, indem man, außer den geſuchten unbekannten Zahlen, noch eine neue willkührliche, z. B. die Summe aller, in die Rechnung mit einführet, welches von einem, der ſich in dergleichen Rechnungen ſchon fleißig geübt hat, in einem jeglichen Falle leicht beurtheilet wird. Zu dieſem Ende wollen wir einige dergleichen Beyſpiele anführen.

§. 44.

III. Aufgabe: Drey ſpielen mit einander, und im erſten Spiele verliert der erſte an jeden der beyden andern ſo viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey ſich hat. Im andern Spiele verliert der zweyte an den erſten und dritten ſo viel, als jeder hat. Im dritten Spiele verliert der dritte an den erſten und zweyten ſo viel, als ein jeder hatte, und da findet ſich, daß alle nach geendigtem Spiele gleich viel haben, ein jeder nemlich 24 Fl. Nun iſt die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man ſetze, der erſte habe gehabt x, der zweyte y und der dritte z Fl. Ueberdieß ſetze man die Summe aller Fl. zuſammen $x + y + z = s$. Da nun im erſten Spiele der erſte ſo viel verliert, als die beyden andern haben, und der erſte x hat, ſo haben die beyden andern $s - x$, und ſo viel verliert der erſte; daher ihm noch

übrig bleiben $2x - s$, der zweyte aber wird haben $2y$ und der dritte $2z$.

Alſo nach dem erſten Spiele wird ein jeder haben, wie folget:

der I.) $2x - s$, der II.) $2y$, der III.) $2z$.

Im zweyten Spiele verliert der zweyte, der nun $2y$ hat, an die beyden andern ſo viel, als beyde haben, oder $s - 2y$. Daher der zweyte noch behält $4y - s$; die beyden andern aber werden zweymal ſo viel haben als vorher.

Alſo nach dem zweyten Spiele wird haben:

der I.) $4x - 2s$, der II.) $4y - s$, der III.) $4z$.

Im dritten Spiele verliert der dritte, der jetzt $4z$ hat, an die andern beyden ſo viel, als ſie haben; ſie haben aber $s - 4z$; alſo behält der dritte noch $8z - s$, und die beyden übrigen bekommen doppelt ſo viel, als ſie hatten.

Alſo wird nach dem dritten Spiele haben:

der I.) $8x - 4s$, der II.) $8y - 2s$, und der III.) $8z - s$.

Da nun jetzt ein jeder 24 Fl. hat, ſo erhalten wir drey Gleichungen, welche ſo beſchaffen ſind, daß man aus der erſten ſogleich x, aus der zweyten y, und aus der dritten z finden kann, inſonderheit da jetzt s eine bekannte Zahl iſt, indem alle zuſammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieſes wird ſich von ſelbſt geben, ohne daß man nöthig habe, darauf zu ſehen.

Dieſe Rechnung wird alſo auf folgende Art angeſtellt werden können:

I.) $8x - 4s = 24$, oder $8x = 24 + 4s$, oder $x = 3 + \frac{1}{2}s$.
II.) $8y - 2s = 24$, oder $8y = 24 + 2s$, oder $y = 3 + \frac{1}{4}s$.
III.) $8z - s = 24$, oder $8z = 24 + s$, oder $z = 3 + \frac{1}{8}s$.

Man addire dieſe 3 Werthe, ſo bekömmt man

$$x + y + z = 9 + \tfrac{7}{8}s.$$

Da nun $x + y + z = s$, ſo hat man $s = 9 + \frac{7}{8}s$.

Wird nun $\frac{7}{8}s$ ſubtrahirt, ſo bleibt $\frac{1}{8}s = 9$ und $s = 72$.

Beym Anfang des Spiels hatte alſo der erſte 39 Fl., der zweyte 21 Fl., und der dritte 12 Fl.

Aus dieſer Auflöſung ſieht man, wie durch Hülfe der Summe von drey unbekannten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Wege geräumt werden konnten.

§. 45.

So ſchwer dieſe Aufgabe ſcheinet, ſo iſt doch zu merken, daß dieſelbe ſogar ohne Algebra aufgelöſt werden kann; man darf nur in Betrachtung derſelben rückwärts gehen. Denn da die drey Perſonen nach dem dritten Spiele gleich viel bekommen haben, nemlich der erſte 24, der zweyte 24, der dritte 24 Fl.; im dritten Spiele aber der erſte und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, ſo müſſen ſie vor dem dritten Spiele folgende Anzahl von Fl. gehabt haben:

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

Im zweyten Spiele hat der erſte und dritte ſein Geld verdoppelt; alſo müſſen ſie vor dem zweyten Spiele gehabt haben:

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

Im erſten Spiele hat der zweyte und dritte ſein Geld verdoppelt; alſo vor dem erſten Spiele haben ſie gehabt:

I.) 39, II.) 21, III.) 12.

und eben ſo viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

§. 46.

IV. Aufgabe: Zwey Perſonen ſind zuſammen 29 Dukaten ſchuldig, und es hat zwar ein jeder Geld, doch nicht ſo viel, daß er dieſe gemeinſchaftliche Schuld bezahlen könnte; darum ſpricht der erſte zu dem andern: giebſt du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes, ſo könnte ich die Schuld ſogleich allein bezahlen. Der andere antwortet hierauf: gieb du mir $\frac{3}{4}$ deines Geldes, ſo könnte ich die Schuld allein bezahlen; wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erſte habe gehabt x, und der andere y Dukaten.
Alſo bekömmt man erſtlich $x+\frac{2}{3}y=29$,
hernach auch $y+\frac{3}{4}x=29$.
Aus der erſten Gleichung findet man $x=29-\frac{2}{3}y$,
und aus der zweyten $x=\frac{116-4y}{3}$.
Aus dieſen beyden Werthen entſteht folgende Gleichung:

$$29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}.$$

Wird dieſe Gleichung mit 3 multiplicirt, ſo erhält man

$$87-2y=116-4y,$$

und addirt man beyderſeits 4y, ſo wird

$$87+2y=116.$$

Subtrahirt man ferner 87, ſo bleibt

$$2y=29.$$

Folglich $y=14\frac{1}{2}$.
Setzt man nun in der obigen Gleichung $y+\frac{3}{4}x=29$ anſtatt y den jetzt gefundenen Werth $14\frac{1}{2}$, ſo verwandelt ſich dieſelbe in folgende Gleichung $14\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x=29$. Subtrahirt man $14\frac{1}{2}$ auf beyden Seiten, ſo erhält man $\frac{3}{4}x=14\frac{1}{2}$, und wenn man mit 4 multiplicirt, ſo wird $3x=58$.

Folglich $x=19\frac{1}{3}$.

Der erſte hat alſo gehabt $19\frac{1}{3}$, und der zweyte $14\frac{1}{2}$ Dukaten.

§. 47.

V. Aufgabe: Drey Tagelöhner haben ein Haus gekauft für 100 Rthl. Der erſte verlangt vom zweyten $\frac{1}{2}$ ſeines Geldes, ſo könnte er das Haus allein bezahlen; der zweyte begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ ſeines Geldes, ſo könnte er das Haus allein bezahlen. Der dritte begehrt vom erſten $\frac{1}{4}$ ſeines Geldes, um das Haus allein zu bezahlen. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Der erſte habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthl., ſo bekömmt man folgende drey Gleichungen:
I.) $x+\frac{1}{2}y=100$. II.) $y+\frac{1}{3}z=100$. III.) $z+\frac{1}{4}x=100$,

aus welchen der Werth von x gefunden wird:

I.) $x = 100 - \frac{1}{2}y$. III.) $x = 400 - 4z$.

Hier konnte nemlich aus der zweyten Gleichung x nicht beſtimmt werden.

Die beyden Werthe von x aber geben dieſe Gleichung:

$$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z \text{ oder } 4z - \frac{1}{2}y = 300$$

welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y + \frac{1}{3}z = 100$; woraus $y = 100 - \frac{1}{3}z$ gefunden wird. Aus der vorher gefundenen Gleichung $4z - \frac{1}{2}y = 300$ aber folgt, daß $y = 8z - 600$, woraus dieſe letzte Gleichung entſpringt:

$100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$, alſo $8\frac{1}{3}z = 700$, oder $\frac{25}{3}z = 700$, und daher $25z = 2100$; folglich $z = \frac{2100}{25} = 84$.

Hieraus findet man $y = 100 - 28$, oder $y = 72$, und endlich $x = 64$.

Folglich hat der erſte gehabt 64 Rthl., der zweyte 72 Rthl., der dritte 84 Rthl.

§. 48.

Da bey dieſem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekannte Zahlen vorkommen, ſo kann die Auflöſung noch auf eine bequemere Art angeſtellet werden.

Denn man ſuche aus der erſten $y = 200 - 2x$, welches alſo durch x beſtimmt wird. Dieſen Werth ſchreibe man für y in der zweyten Gleichung, ſo hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$. Wenn man nun 100 ſubtrahirt, ſo bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und daher $z = 6x - 300$.

Alſo iſt auch z durch x beſtimmt; dieſen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, ſo kömmt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkömmt, und alſo $25x - 1600 = 0$, daher $x = 64$; folglich $y = 200 - 128 = 72$,

und $z = 384 - 300 = 84$.

§. 49.

Eben ſo kann man verfahren, wenn auch mehr ſolche Gleichungen vorkommen. Wenn man alſo auf eine allgemeine Art hat:

I.) $u + \frac{x}{a} = n$, II.) $x + \frac{y}{b} = n$, III.) $y + \frac{z}{c} = n$,

IV.) $z + \frac{u}{d} = n$.

Aus welchen, nachdem man die Brüche weggebracht hat, dieſe Gleichungen werden:

I) $au + x = an$, II.) $bx + y = bn$, III.) $cy + z = cn$,
IV.) $dz + u = dn$.

Hier bekommen wir aus der erſten $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten $abn - abu + y = bn$ giebt; alſo $y = bn - abn + abu$. Dieſer Werth in der dritten giebt $bcn - abcn + abcu + z = cn$; alſo $z = cn - bcn + abcn - abcu$. Dieſer endlich in der vierten Gleichung giebt $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$. Alſo wird $dn - cdn + bcdn - abcdn = - abcdu + u$ oder $(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$, woraus man erhält:

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Hieraus findet man ferner folgende Gleichungen:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

§. 50.

VI. Aufgabe: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten. In einer ſind Schweizer, in der zweyten Schwaben, in der dritten Sachſen. Mit dieſen will er eine Stadt beſtürmen, und verſpricht zur Belohnung 901 Rthl. alſo auszutheilen, daß von der Compagnie, die den Sturm thut, ein jeder 1 Rthl. bekommen, das übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden ſoll.

Nun findet es ſich, daß, wenn die Schweizer den Sturm thäten, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthl., wenn aber die Schwaben den Sturm thäten, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthl., und wenn die Sachſen den Sturm wagten, ein jeder der beyden andern Compagnien $\frac{1}{4}$ Rthl. bekommen würde. Nun iſt die Frage, aus wie viel Köpfen eine jede Compagnie beſtanden habe?

Man ſetze, die Zahl der Schweizer ſey x, der Schwaben y, und der Sachſen z Köpfe geweſen.

Ferner ſetze man die Anzahl aller $x + y + z = s$, weil leicht vorher zu ſehen iſt, daß dadurch die Rechnung gar ſehr erleichtert wird. Wenn nun die Schweizer den Sturm thun, deren Anzahl $= x$, ſo iſt die Zahl der beyden übrigen $= s - x$. Da nun jene 1 Rthl., dieſe aber einen halben Rthl. bekommen, ſo wird $x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}x = 901$.

Eben ſo, wenn die Schwaben Sturm laufen, ſo wird $y + \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}y = 901$,
und endlich, wenn die Sachſen Sturm laufen, ſo wird $z + \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}z = 901$ ſeyn.
Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchſtaben x, y und z beſtimmt werden kann.
Denn aus der erſten erhält man $x = 1802 - s$,
aus der zweyten $2y = 2703 - s$,
und aus der dritten $3z = 3604 - s$.
Nun ſchreibe man dieſelben unter einander; ſuche aber erſtlich die Werthe von 6x, 6y, und 6z.

$$6x = 10812 - 6s$$
$$6y = 8109 - 3s$$
$$6z = 7208 - 2s$$

Dieſes addirt

giebt $6x + 6y + 6z = 6(x + y + z) = 26129 - 11s$.
Weil aber $x + y + z = s$, ſo kann man anſtatt $6x + 6y + 6z$ ſetzen $6s$.
Folglich $6s = 26129 - 11s$ und $17s = 26129$, wovon der 17te Theil beträgt $s = 1537$, welches die Anzahl aller Köpfe iſt; und daraus findet man ferner:

$x = 1802 - 1537 = 265$

$2y = 2703 - 1537 = 1166$ und daher $y = 583$

$3z = 3604 - 1537 = 2067$ und alſo $z = 689$.

Die Compagnie der Schweizer beſtand alſo aus 265 Mann, die Compagnie der Schwaben aus 583, und die Compagnie der Sachſen aus 689 Mann.

Fünftes Kapitel.

Von der Auflöſung der reinen quadratiſchen Gleichungen.

---

§. 51.

Eine Gleichung, worinnen Potenzen der unbekannten Größe vorkommen, erhält allemal den Namen von der höchſten Dignität derſelben; ſie wird daher quadratiſch genannt, wenn darin das Quadrat oder die zweyte Poteſtät der unbekannten Zahl vorkömmt, wofern ſich nur keine höhere Poteſtäten von derſelben darin befinden. Denn ſollte darin auch die dritte Poteſtät vorkommen, ſo wird

eine ſolche Gleichung ſchon zu den cubiſchen gerechnet, wovon die Aufløſung beſondere Regeln erfordert.

In einer quadratiſchen Gleichung kommen alſo nur dreyerley Glieder vor: zum erſten ſolche Glieder, worinnen die unbekannte Zahl gar nicht enthalten iſt, oder welche blos aus bekannten Zahlen zuſammengeſetzt ſind.

Zweytens ſolche Glieder, in welchen nur die erſte Poteſtät der unbekannten Zahl vorkömmt.

Und drittens ſolche, in welchen das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten iſt.

Wenn alſo x die unbekannte Zahl andeutet, die Buchſtaben a, b, c, d ꝛc. aber bekannte Zahlen vorſtellen, ſo haben die Glieder der erſten Art die Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

§. 52.

Wir haben ſchon oben geſehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art in ein einziges zuſammengezogen, oder als ein einziges Glied betrachtet werden können.

Daher kann dieſe Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angeſehen, und alſo vorgeſtellet werden: $(a - b + c)xx$, weil in der That $a - b + c$ eine bekannte Zahl ausdrückt, und auch durch einen einzelnen Buchſtaben, z. B. durch m, angezeigt werden könnte.

Auf eine ähnliche Art verfährt man, wenn ſich ſolche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens $=$ befinden.

Z. B. wenn dieſe Gleichung vorkömmt:

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$$

ſo ſubtrahirt man erſtlich $2xx$, wodurch man erhält:

$$-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$$

Hernach addiret man $8x$, ſo hat man:

$$5x + 4 = 3xx + 11$$

und 11 ſubtrahirt giebt

$$5x - 7 = 3xx.$$

§. 53.

Man kann auch alle Glieder auf eine Seite des Zeichens $=$ bringen, ſo daß auf der andern Seite o zu ſtehen kommt; wobey zu bemerken iſt, daß, wenn Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müſſen.

Die obige Gleichung wird daher dieſe Form bekommen $3xx - 5x + 7 = 0$; und ſo wird auch überhaupt eine jede quadratiſche Gleichung durch dieſe Form vorgeſtellt werden können:

$$axx \pm bx \pm c = 0$$

wo das Zeichen $\pm$ durch plus oder minus ausgeſprochen wird, um anzuzeigen, daß ſolche Glieder bald poſitiv, bald negativ ſeyn können.

§. 54.

Es mag eine quadratiſche Gleichung anfänglich ausſehen, wie ſie will, ſo kann dieſelbe doch immer auf dieſe Form, welche nur aus drey Gliedern beſteht, gebracht werden. Wenn man z. B. auf dieſe Gleichung gekommen wäre:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$$

ſo müßten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden, welches auf folgende Art geſchehen könnte. Man multiplicire erſtlich mit $cx + d$, ſo bekömmt man

$$ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h}$$

und dieſes mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$$agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd$$

welches eine quadratiſche Gleichung iſt, die auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wenn alle auf eine Seite geſetzt werden. Gemeiniglich pflegt man ſie folgendergeſtalt unter einander zu ſchreiben:

$$
\begin{aligned}
0 = & \; agxx + bgx + bh \\
- & \; cexx + ahx - fd \\
& \qquad\;\; - cfx \\
& \qquad\;\; - edx
\end{aligned}
$$

oder, um dieſelbe noch deutlicher vorzuſtellen,

$$0 = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd.$$

§. 55.

Dergleichen quadratiſche Gleichungen, worin von allen drey Arten Glieder enthalten ſind, werden vollſtändige genannt, und die Auflöſung derſelben iſt auch mehr Schwierigkeiten unterworfen; daher wir erſtlich ſolche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von dieſen drey Gliedern mangelt. Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden ſeyn, ſo wäre die Gleichung nicht einmal quadratiſch, ſondern gehörte zu der vorigen Art. Sollte aber das Glied, welches blos bekannte Zahlen enthält, mangeln, ſo würde die Gleichung alſo ausſehen $axx \pm bx = 0$, welche man durch x theilen kann, wodurch man zu dieſer Gleichung gelangt $ax \pm b = 0$, welche wieder eine einfache Gleichung iſt, und nicht hierher gehört.

§. 56.

Wenn aber das mittlere Glied mangelt, welches nur die erſte Poteſtät von x enthält, ſo bekömmt die Gleichung dieſe Form: $axx \pm c = 0$, oder $axx = c$, es mag nun c das Zeichen $+$ oder $-$ haben.

Eine ſolche Gleichung wird eine reine quadratiſche genannt, weil ihre Auflöſung keiner Schwierigkeit unterworfen iſt. Denn man darf nur durch a theilen, ſo bekömmt man $xx = \frac{c}{a}$; und wenn man beyderſeits die Quadratwurzel auszieht, ſo hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelöſt worden iſt.

§. 57.

Hier ſind nun drey Fälle zu erwägen. Der erſte, wenn $\frac{c}{a}$ eine Quadratzahl iſt, davon ſich die Wurzel wirklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rationalzahl ausgedrückt, dieſelbe mag ganz oder gebrochen ſeyn.

Alſo aus dieſer Gleichung $xx = 144$ bekömmt man $x = \sqrt{144} = 12$, und aus dieſer $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall iſt, wenn $\frac{c}{a}$ keine Quadratzahl iſt, da man ſich denn mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Alſo wenn $xx = 12$, ſo wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung beſtimmt werden kann, wie wir ſchon oben im erſten Theile §. 111. gezeigt haben.

Iſt aber drittens $\frac{c}{a}$ gar eine negative Zahl, ſo wird der Werth von x ganz und gar unmöglich oder imaginär, und zeiget an, daß die Auflöſung der Aufgabe, welche auf eine ſolche Gleichung geführt hat, an ſich unmöglich ſey.

§. 58.

Ehe wir weiter gehen, iſt noch zu bemerken, daß, ſo oft aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden muß, dieſelbe allezeit einen doppelten Werth erhalte, und ſowohl poſitiv als negativ genommen werden könne, wie bereits im erſten Th. §. 109. gezeigt worden iſt.

Wenn man z. B. auf dieſe Gleichung kömmt $x^2 = 49$, ſo iſt der Werth von x nicht nur $+7$, ſondern auch -7, und pflegt daher alſo angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle dieſe Gleichungen eine doppelte Auflöſung zulaſſen; in vielen Fällen aber, wo etwa von einer Anzahl Menſchen die Frage iſt, fällt der negative Werth von ſelbſt weg.

§. 59.

Auch bey dem vorhergehenden Falle, wo die bloße Zahl mangelt, laſſen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerley Werthe für x zu, obgleich nur einer gefunden wird, wenn man durch x dividirt. Denn wenn z. B. dieſe Gleichung vorkömmt $xx = 3x$, wo ein ſolcher Werth für x gegeben werden ſoll, daß xx dem $3x$ gleich werde, ſo geſchieht dieſes, wenn man ſetzt $x = 3$, welcher Werth herauskömmt, wenn man durch x dividirt. Allein außer dieſem läßt ſich auch die Gleichung auflöſen, wenn man $x = 0$ ſetzt; denn da wird $x^2 = 0$ und $3x = 0$. Dieſes iſt bey allen quadratiſchen Gleichungen zu merken, daß immer zwey Auflöſungen Statt finden, da hingegen bey den einfachen Gleichungen nie mehr als eine Platz hat.

Wir wollen nun dieſe reinen quadratiſchen Gleichungen durch einige Beyſpiele erläutern.

§. 60.

I. Aufgabe. Es wird eine Zahl geſucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt 24 giebt.

Es ſey dieſe Zahl $= x$, ſo muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus dieſe Gleichung entſpringt: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x^2 = 24$.

Mit 6 multiplicirt wird $x^2 = 144$, und wenn man hieraus die Quadratwurzel zieht, ſo erhält man $x = \pm 12$. Denn wenn $x = +12$, ſo iſt $\frac{1}{2}x = 6$, und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 iſt. Ebenfalls wenn $x = -12$, ſo iſt $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

§. 61.

II. Aufgabe. Es wird eine Zahl geſucht von der Beſchaffenheit, daß, wenn zu derſelben erſtlich 5 addirt, und hernach auch 5 ſubtrahirt, und der Reſt mit der erſten Summe multiplicirt wird, 96 herauskomme.

Es ſey dieſe Zahl x, ſo muß $x + 5$ mit $x - 5$ mul-

tiplicirt 96 geben; woraus dieſe Gleichung entſpringt: $(x+5)\times(x-5)=x^2-25=96$.

Man addire auf beyden Seiten 25, ſo wird $x^2=121$, und die Quadratwurzel ausgezogen giebt $x=11$. Denn hier wird $x+5=16$, und $x-5=6$. Nun aber iſt $6\times16=96$.

Allgemein könnte man dieſe Aufgabe folgendergeſtalt ausdrücken.

Es wird eine Zahl a gegeben, vermittelſt welcher eine andere Zahl geſucht werden ſoll, von der Beſchaffenheit, daß die Summe aus der gegebenen und geſuchten Zahl multiplicirt in den Unterſchied dieſer beyden Zahlen ein Product liefere, welches einer zweyten gegebenen Zahl b gleich iſt.

Es ſey wiederum die unbekannte Zahl x, ſo muß $(x+a)\times(x-a)=b$ ſeyn; woraus man durch die wirkliche Multiplication erhält: $x^2-a^2=b$, und wenn man a^2 auf beyden Seiten addirt, $x^2=a^2+b$, folglich $x=\sqrt{(a^2+b)}$.

Man findet alſo in allen dergleichen Fällen die geſuchte Zahl, wenn man das Quadrat von der erſten der beyden gegebenen Zahlen zu der zweyten Zahl addirt, und aus dieſer Summe die Quadratwurzel zieht.

§. 62.

III. Aufgabe. Es wird eine Zahl geſucht von der Beſchaffenheit, daß, wenn man dieſelbe erſtlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 ſubtrahirt, jene Summe mit dieſem Reſte multiplicirt 51 gebe.

Es ſey die Zahl x, ſo muß $10+x$ mit $10-x$ multiplicirt 51 geben, woraus dieſe Gleichung entſteht: $100-x^2=51$.

Man addire x^2 und ſubtrahire 51, ſo kömmt $x^2=49$ heraus, wovon die Quadratwurzel die geſuchte Zahl $x=7$ anzeigt.

Setzt man hier wiederum, um die Aufgabe allgemein zu machen, anſtatt der Zahl 10, einen Buchſtaben,

z. B. m, und anſtatt 51 den Buchſtaben p, ſo hat man die Gleichung $(m+x) \times (m-x) = p$, d. i. $m^2 - x^2 = p$ und daher $m^2 = p + x^2$, folglich $m^2 - p = x^2$ und $\sqrt{(m^2 - p)} = x$.

§. 63.

IV. Aufgabe. Es haben drey Perſonen Geld. So oft der erſte 7 Rthl. hat, hat der andere 3 Rthl., und ſo oft der andere 17 Rthl. hat, hat der dritte 5 Rthl. Wenn ich aber das Geld des erſten mit dem Gelde des andern, und das Geld des andern mit dem Gelde des dritten, und auch endlich das Geld des dritten mit dem Gelde des erſten multiplicire, hernach dieſe drey Producte zuſammen addire, ſo wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ ſeyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man ſetze, der erſte habe gehabt x Rthl., und da geſagt wird, daß, ſo oft der erſte 7 Rthl. habe, ſo habe der andere 3 Rthl., ſo will dieſes ſo viel ſagen, daß das Geld des erſten ſich zum Gelde des zweyten verhalte, wie 7:3. Das Geld des zweyten muß alſo die vierte Proportionalzahl zu 7, 3 und x, folglich $\frac{3}{7}x$ ſeyn.

Da ferner das Geld des zweyten ſich verhält zum Gelde des dritten, wie 17 zu 5, ſo iſt das Geld des dritten die vierte Proportionalzahl zu 17, 5 und $\frac{3}{7}x$, d. i. $\frac{15}{119}x$.

Nun multiplicire man das Geld des erſten x mit dem Gelde des zweyten $\frac{3}{7}x$, ſo wird das Product $= \frac{3}{7}x^2$.

Ferner das Geld des zweyten $\frac{3}{7}x$ mit dem Gelde des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}x^2$.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Gelde des erſten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}x^2$. Dieſe drey Producte zuſammen machen $\frac{3}{7}x^2 + \frac{45}{833}x^2 + \frac{15}{119}x^2$, welche, unter einen Nenner gebracht, $\frac{507}{833}x^2$ geben, welches der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich geſetzt werden muß.

Alſo hat man $\frac{507}{833}x^2 = 3830\frac{2}{3}$.

Mit 3 multiplicirt giebt $\frac{1521}{833}x^2 = 11492$,

und wenn man mit 833 multiplicirt, erhält man $1521\,x^2 = 9572836$.

Dieſes durch 1521 dividirt, wird $x^2 = \frac{9572836}{1521}$, und hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch ſich durch 13 aufheben läßt, wodurch man erhält $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$; folglich $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Alſo hat der erſte $79\frac{1}{3}$ Rthl., der zweyte 34 Rthl., und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Dieſe Rechnung läßt ſich noch leichter anſtellen, wenn man die darinnen vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflöſet, und dabey inſonderheit ihre Quadrate bemerket.

Alſo iſt $507 = 3 \times 169$, wo 169 das Quadrat von 13 iſt; hernach iſt $833 = 7 \times 119$ und $119 = 7 \times 17$.

Da man nun $\frac{3 \times 169}{17 \times 49}xx = 3830\frac{2}{3}$ hat, ſo multiplicire man mit 3, da kömmt $\frac{9 \times 169}{17 \times 49}xx = 11492$ heraus.

Dieſe Zahl löſe man auch in ihre Factores auf, wovon der erſte Factor 4 ſogleich in die Augen fällt; denn es iſt $11492 = 4 \times 2873$.

Ferner läßt ſich 2873 durch 17 theilen, und wird $2873 = 17 \times 169$; daher unſere Gleichung nunmehr alſo ausſieht: $\frac{9 \times 169}{17 \times 49}xx = 4 \times 17 \times 169$, welche durch 169 dividirt, $\frac{9}{17 \times 49}xx = 4 \times 17$ wird.

Ferner mit 17×49 multiplicirt und durch 9 dividirt, giebt $xx = \frac{4 \times 289 \times 49}{9}$, wo alle Factores Quadrate ſind, und alſo die Wurzel ſeyn wird

$x = \frac{2 \times 17 \times 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

§. 64.

V. Aufgabe. Einige Kaufleute ſchicken zu Errichtung einer Handlung einen Factor nach Archangel. Jeder von dieſen Kaufleuten giebt hierzu zehnmal ſo viel Thaler als Perſonen ſind, und der Factor gewinnt mit jedem 100 Rthl. zweymal ſo viel als der Perſonen ſind. Wenn man nun $\frac{1}{100}$ Theil des ganzen Gewinnſtes mit $2\frac{2}{9}$ multiplicirt, ſo kömmt die Zahl der Kaufleute heraus. Wie viel ſind ihrer geweſen?

Die Anzahl derſelben ſey $= x$, und da ein jeder $10x$ Rthl. eingelegt hat, ſo war das ganze Kapital $= 10xx$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl. $2x$ Rthl., folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem ganzen Kapital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieſes Gewinnſtes iſt demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, d. i. mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$, welches der Zahl der Kaufleute x gleich ſeyn muß.

Daher hat man dieſe Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche cubiſch zu ſeyn ſcheinet. Weil man aber durch x dividiren kann, ſo kömmt dieſe quadratiſche Gleichung heraus $xx = 225$ und folglich $x = 15$.

Es ſind daher in allem 15 Kaufleute geweſen, und jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

Sechſtes Kapitel.

Von der Auflöſung der vermiſchten quadratiſchen Gleichungen.

---

§. 65.

Eine quadratiſche Gleichung wird vermiſcht genannt, wenn in derſelben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich ſolche, welche das Quadrat der unbekannten Zahl enthalten, wie axx; hernach ſolche, worin die unbekannte Zahl ſelbſt vorkömmt, als bx; und endlich auch ſolche Glieder, welche blos aus bekannten Zahlen zuſammengeſetzt ſind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zuſammengezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens $=$ gebracht werden können, ſo wird die Form dieſer Gleichung alſo beſchaffen ſeyn:

$$axx \pm bx \pm c = 0.$$

Wie nun aus ſolchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden könne, ſoll in dieſem Kapitel auf zweyerley Art gezeigt werden.

§. 66.

Eine jede quadratiſche Gleichung, z. B. die vorige $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, kann durch die Theilung ſo eingerichtet werden, daß das erſte Glied blos allein das reine Quadrat der unbekannten Zahl xx enthalte. Denn wenn man hier mit a dividirt, ſo erhält man $x^2 \pm \frac{b}{a} x \pm \frac{c}{a} = 0$. Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, ſo bekömmt unſere Gleichung dieſe Form $x^2 \pm px \pm q = 0$, oder, wenn man q auf die andere Seite bringt, $x^2 \pm px = \pm q$, wo p und q bekannte Zahlen, ſowohl poſitive als negative andeuten; und jetzt kömmt alles darauf an, daß man zeige, wie der wahre Werth von x gefunden werden könne.

Hierbey iſt zuerſt zu bemerken, daß, wenn $x^2 + px$ ein wirkliches Quadrat wäre, die Auflöſung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte, beyderſeits die Quadratwurzel zu nehmen.

§. 67.

Es iſt aber klar, daß $x^2 + px$ kein Quadrat ſeyn kann, weil wir oben (1. Th. §. 238.) geſehen haben, daß, wenn die Wurzel aus zwey Gliedern beſteht, z. B. $x + n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nemlich, außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, alſo daß das Quadrat von $x + n$ ſeyn wird: $x^2 + 2nx + n^2$. Da wir nun auf einer Seite ſchon $x^2 + px$ haben, ſo können wir x^2 als das Quadrat des erſten Theils der Wurzel anſehen, und da muß px das doppelte Product des erſten Theils der Wurzel x in den andern Theil ſeyn; daher der andere Theil $\frac{1}{2}p$ ſeyn wird, wie denn auch in der That das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ iſt.

§. 68.

Da alſo $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ ein wirkliches Quadrat, und die Wurzel daraus $x + \frac{1}{2}p$ iſt, ſo dürfen wir nur bey unſerer Gleichung zu $x^2 + px = q$ beyderſeits $\frac{1}{4}p^2$ addiren, um folgende Gleichung $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$ zu erhalten, wo auf der erſten Seite ein wirkliches Quadrat, auf der andern aber blos bekannte Zahlen befindlich ſind. Wenn wir daher beyderſeits die Quadratwurzeln nehmen, ſo erhalten wir $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$. Subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, ſo erhält man $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; und da eine jede Quadratwurzel ſowohl poſitiv als negativ genommen werden kann, ſo finden ſich für x zwey Werthe, welche alſo durch dieſe Form ausgedrückt werden können:

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}.$$

§. 69.

In dieſer Formel iſt nun die Regel enthalten, nach welcher ſich alle vermiſchte quadratiſche Gleichungen auflöſen laſſen, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzuſtellen, ſo iſt genug, daß man den Inhalt dieſer Formel dem Gedächtniß wohl einpräge.

Man ſieht nemlich aus der Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)},$$

daß die unbekannte Zahl x gleich ſeyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt iſt, und über das noch + oder — der Quadratwurzel aus dem Quadrate der Zahl, ſo eben geſchrieben worden, nebſt der bloßen Zahl, welche das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wenn daher in einer Aufgabe dieſe Gleichung vorkäme: $x^2 = 6x + 7$, ſo würde man ſogleich haben

$$x = 3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4.$$

Folglich ſind die beyden Werthe der unbekannten Zahl

I.) $x = 7$, und II.) $x = -1$.

Hätte man dieſe Gleichung $x^2 = 10x - 9$, ſo wird $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)}$, welches $= 5 \pm 4$; daher die beyden Werthe $x = 9$ und $x = 1$ ſeyn werden.

§. 70.

Zu mehrerer Erläuterung dieſer Regel können folgende Fälle unterſchieden werden: I.) wenn p eine gerade Zahl iſt, II.) wenn p eine ungerade Zahl iſt, und III.) wenn p eine gebrochene Zahl iſt.

Es ſey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung alſo beſchaffen: $x^2 = 2px + q$, ſo bekömmt man

$$x = p \pm \sqrt{(p^2 + q)}.$$

Es ſey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $x^2 = px + q$, da dann ſeyn wird

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}$$

Da nun $\frac{1}{4}p^2 + q = \frac{p^2 + 4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber

die Quadratwurzel gezogen werden kann, ſo bekömmt man $x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$, oder $x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$.

Iſt aber III.) p ein Bruch, ſo kann die Auflöſung folgendergeſtalt geſchehen. Es ſey die quadratiſche Gleichung $ax^2 = bx + c$, oder $x^2 = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, ſo wird nach der Regel $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$. Da nun aber $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}$, und hier der Nenner ein Quadrat iſt, ſo wird $x = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ac)}}{2a}$.

§. 71.

Der andere Weg, welcher auch zu dieſer Auflöſung führet, beſtehet darin, daß man eine ſolche vermiſchte quadratiſche Gleichung, wie z. B. $x^2 = px + q$ in eine reine verwandele, welches geſchieht, wenn man anſtatt der unbekannten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, ſo daß $x = y + \frac{1}{2}p$; da man denn, ſobald y gefunden worden iſt, auch ſogleich den Werth für x erhält, wenn man $\frac{1}{2}p$ zu y addiret.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anſtatt x, ſo wird $x^2 = y^2 + py + \frac{1}{4}p^2$ und $px = py + \frac{1}{2}p^2$. Die obige Gleichung $x^2 = px + q$ wird ſich alſo in folgende verwandeln laſſen:

$$yy + py + \tfrac{1}{4}pp = py + \tfrac{1}{2}pp + q$$

Subtrahirt man hier erſtlich py, ſo hat man

$$yy + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{2}pp + q$$

Ferner $\frac{1}{4}pp$ ſubtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine quadratiſche Gleichung iſt, woraus man ſogleich erhält $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$.

Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, ſo wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + q)}$ wie wir ſchon oben gefunden haben. Es iſt alſo nichts mehr übrig, als dieſe Regel mit Beyſpielen zu erläutern.

§. 72.

I. Aufgabe. Ich habe zwey Zahlen; die eine iſt um 6 größer als die andere, und ihr Product macht 91; welches ſind dieſe Zahlen?

Die kleinere Zahl ſey x, ſo iſt die größere $x + 6$ und ihr Product $x^2 + 6x = 91$.
Man ſubtrahire $6x$, ſo hat man $x^2 = -6x + 91$, und nach der Regel $x = -3 \pm \sqrt{(9 + 91)} = -3 \pm 10$.
Daher hat man entweder $x = 7$ oder $x = -13$.

Dieſe Aufgabe verſtattet alſo zwey Auflöſungen; nach der erſten iſt die kleinere Zahl $x = 7$ und die größere $x + 6 = 13$.

Nach der zweyten aber iſt die kleinere $x = -13$ und die größere $x + 6 = -7$.

§. 73.

II. Aufgabe. Suche eine Zahl von der Beſchaffenheit, daß, wenn ich ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicire, und zum Product die Hälfte der gefundenen Zahl addire, die Zahl 30 herauskomme.

Es ſey dieſe Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}x^2$ giebt. Es muß alſo $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = 30$ ſeyn. Mit 6 multiplicirt, wird $x^2 + 3x = 180$, oder $x^2 = -3x + 180$; woraus man findet

$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} + 180)} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{27}{2}.$$

Daher iſt entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

§. 74.

III. Aufgabe. Einer kauft ein Pferd für etliche Thaler, verkauft daſſelbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran ſo viel Procente, als das Pferd gekoſtet hat. Nun iſt die Frage, wie theuer daſſelbe eingekauft worden ſey.

Das Pferd habe gekoſtet x Rthl., und weil der Käufer beym Verkauf darauf x Procent gewonnen hat, ſo ſetze man: mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x?

Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen hat, der Einkauf aber x geweſen iſt, ſo muß er daſſelbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Daher wird $x + \frac{xx}{100} = 119$. Man ſubtrahire x, ſo kömmt $\frac{xx}{100} = - x + 119$, und mit 100 multiplicirt, wird $x^2 = - 100x + 11900$, woraus nach der oben gegebenen Regel gefunden wird $x = - 50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = - 50 \pm \sqrt{14400}$ $= - 50 \pm 120$.

Das Pferd hat alſo gekoſtet 70 Rthl. Weil nun der Käufer darauf 70 Procent gewonnen hat, ſo war der Gewinnſt 49 Rthl. Er muß alſo daſſelbe für 70 + 49, d. i. für 119 Rthl., wie auch in der Aufgabe geſagt wird, verkauft haben.

§. 75.

IV. Aufgabe. Es kauft jemand eine gewiſſe Anzahl Tücher; das erſte für 2 Rthl., das zweyte für 4 Rthl., das dritte für 6 Rthl. u. ſ. f., nemlich er giebt immer 2 Rthl. mehr für das folgende, und bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel ſind der Tücher geweſen?

Nennt man die zu ſuchende Anzahl der Tücher x, ſo zeigt folgendes, wie viel er für jedes bezahlt hat; nemlich

für das 1, 2, 3, 4, 5 . . . x
zahlt er 2, 4, 6, 8, 10 . . . 2x Rthl.

Man muß alſo dieſe arithmetiſche Progreſſion $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots 2x$, welche aus x Gliedern beſteht, ſummiren, um den Preis aller Tücher zu finden.

Nach der im erſten Theile §. 314. gegebenen Regel addire man alſo das erſte und letzte Glied zuſammen, ſo bekömmt man $2x + 2$. Dieſes multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, ſo erhält man die doppelte Summe $2x^2 + 2x$. Daher die Summe ſelbſt ſeyn wird $x^2 + x$, welche der Zahl 110 gleich ſeyn muß, oder $x^2 + x = 110$. Man ſubtrahire x, ſo wird $x^2 = - x + 110$.

Folglich $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 110)}$ oder $= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{441}{4}}$

oder $x = -\frac{1}{2} + \frac{21}{2} = 10$.
D. h. es ſind 10 Stück Tücher gekauft worden.

§. 76.

V. Aufgabe. Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. Wären der Tücher 3 mehr geweſen für eben das Geld, ſo wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel ſind es Tücher geweſen?

Es ſeyen x Tücher geweſen, ſo hat das Stück wirklich gekoſtet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x + 3$ St. für 180 Rthl. bekommen, ſo würde das Stück gekoſtet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl., welcher Preis um 3 Rthl. weniger iſt, als der wirkliche, woraus dieſe Gleichung entſteht:
$\frac{180}{x+3} = \frac{180}{x} - 3$.

Man multiplicire mit x, ſo hat man $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$.

Durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$.

Mit $x + 3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - x^2$.
Man addire x^2, ſo kömmt $x^2 + 60x = 180 + 57x$.
Man ſubtrahire 60x, ſo bleibt $x^2 = -3x + 180$.
Hieraus findet man nach der obigen Regel (§. 68.)
$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + 180)}$, oder $x = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12$.

Es ſind alſo 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, daher eines 15 Rthl. gekoſtet hat. Hätte man aber 3 Stück mehr, nemlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, ſo würde ein Stück 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger gekoſtet haben.

§. 77.

VI. Aufgabe. Zwey Perſonen treten in eine Geſellſchaft, und legen zuſammen 100 Rthl. ein. Der erſte läßt ſein Geld 3 Monat, der andere aber 2 Monat lang

ſtehen, und ein jeder zieht mit Capital und Gewinnſt 99 Rthl. Wie viel hat ein jeder eingelegt?

Der erſte habe eingelegt x Rthl. und alſo der andere $100-x$. Da nun der erſte 99 Rthl. zurück zieht, ſo iſt ſein Gewinn $99-x$, welcher in 3 Monaten mit dem Capital x erworben worden iſt. Da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, ſo war ſein Gewinn $x-1$, welcher in 2 Monaten mit dem Capital $100-x$ erworben worden. Mit eben dieſem Capital $100-x$ würden alſo in 3 Monaten $\frac{3x-3}{2}$ gewonnen werden. Nun ſind dieſe Gewinnſte den Capitalen proportional; nemlich jenes Capital verhält ſich zu jenem Gewinnſte, wie dieſes Capital zu dieſem Gewinnſte,

d. i. $x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}$.

Man ſetze das Product der äußern dem Product der mittlern Glieder gleich (I. Th. §. 344.), ſo hat man $\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+x^2$, und wenn man mit 2 multiplicirt $3x^2-3x=19800-398x+2x^2$.

Man ſubtrahire $2x^2$, ſo wird $x^2-3x=19800-398x$, hierzu $3x$ addirt, giebt $x^2=-395x+19800$.

Daher nach der obenangeführten Regel (§. 68.) ſeyn muß

$$x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\left(\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}\right)}$$

d. i. $x=-\frac{395}{2}+\frac{485}{2}=\frac{90}{2}=45$.

Der erſte hat alſo eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. Mit den 45 Rthl. hat der erſte in 3 Monaten 54 Rthl. gewonnen, und würde demnach in einem Monat 18 Rthl. gewonnen haben. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monaten 44 Rthl., würde alſo in einem Monat 22 Rthl. gewonnen haben, welches auch mit jenem übereinſtimmt. Denn wenn mit 45 Rthl. in einem Monat 18 gewonnen werden, ſo werden mit 55 in gleicher Zeit 22 Rthl. gewonnen.

Siebentes Kapitel.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus den viereckigen Zahlen.

§. 78.

Wir haben oben (I. Th. §. 324—328.) geſehen, wie die vieleckigen Zahlen gefunden werden können; was wir aber daſelbſt eine Seite genannt haben, wird auch eine Wurzel genannt. Wenn man nun die Wurzel durch x andeutet, ſo werden daraus die vieleckigen Zahlen folgendergeſtalt gefunden:

Das 3eck iſt $\frac{xx+x}{2}$

Das 4eck ... xx

Das 5eck ... $\frac{3xx-x}{2}$

Das 6eck ... $2xx-x$

Das 7eck ... $\frac{5xx-3x}{2}$

Das 8eck ... $3xx-2x$

Das 9eck ... $\frac{7xx-5x}{2}$

Das 10eck ... $4xx-3x$

Das neck ... $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

§. 79.

Durch Hülfe dieſer Formeln iſt es nun leicht, für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckige Zahl, ſo groß auch die Zahl der Ecken ſeyn mag, zu finden, wie ſchon im erſten Theile genugſam gezeigt worden iſt. Wenn aber umgekehrt eine vieleckige Zahl von einer gewiſſen Anzahl Seiten gegeben iſt, ſo macht es

ſchon mehr Mühe, wenn man die Wurzel, oder die Seite davon finden ſoll, denn es wird dazu die Auflöſung quadratiſcher Gleichungen erfordert; daher dieſe Sache allhier beſonders abgehandelt zu werden verdienet. Wir wollen hierbey der Ordnung nach von den dreyeckigen Zahlen anfangen, und hernach zu den mehreckigen fortſchreiten.

§. 80.

Es ſey z. B. 91 die gegebene dreyeckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel geſucht werden ſoll.

Setzt man nun die Wurzel $= x$, ſo muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich ſeyn. Man multiplicire mit 2, ſo hat man $x^2 + x = 182$, woraus man findet: $x^2 = -x + 182$ u. alſo $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 182)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}}$ Folglich $x = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13$; daher iſt die verlangte Dreyeckswurzel $= 13$; denn das Dreyeck von 13 iſt 91.

§. 81.

Es ſey nunmehr auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckige Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden ſoll.

Setzt man dieſelbe $= x$, ſo wird $\frac{xx+x}{2} = a$, oder $x^2 + x = 2a$, woraus gefunden wird

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)}, \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{(\frac{1}{4} + 2a)} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{(8a+1)} - 1}{2}$$

Hieraus erhellt dieſe Regel. **Man multiplicire die gegebene dreyeckige Zahl mit 8, und zum Product addire man 1; aus der Summe ziehe man die Quadratwurzel; von derſelben ſubtrahire man 1, und den Reſt dividire man durch 2, ſo kömmt die geſuchte Dreyeckswurzel heraus.**

§. 82.

Es haben alſo alle dreyeckige Zahlen dieſe Eigen-

ſchaft, daß, wenn man dieſelben mit 8 multiplicirt und hernach zu dieſem Producte 1 addirt, immer eine Quadratzahl herauskommen müſſe, wie man aus folgendem Täfelchen erſehen kann.

III Eck

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 ꝛc.

Achtfaches Dreyeck + 1

9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289, 361, 441, 529 ꝛc.

Iſt nun die gegebene Zahl nicht ſo beſchaffen, ſo iſt es ein Zeichen, daß dieſelbe keine wirkliche dreyeckige Zahl ſey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

§. 83.

Man ſuche nun nach dieſer Regel die Dreyeckswurzel aus der Zahl 210, ſo iſt $a = 210$ und $8a + 1 = 1681$, wovon die Quadratwurzel 41 iſt; woraus man ſieht, daß die Zahl 210 wirklich unter die dreyeckigen Zahlen gehöret, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$ iſt.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel geſucht werden ſollte, ſo wäre dieſelbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und alſo irrational. Es wird aber auch wirklich von dieſer Wurzel, nemlich von $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$ das Dreyeck folgendergeſtalt gefunden:

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, ſo iſt $x^2 = \frac{17-\sqrt{13}}{2}$.

Hierzu $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ addirt,

giebt $x^2 + x = \frac{17-\sqrt{33}}{2} + \frac{\sqrt{33}-1}{2} = \frac{16}{2} = 8$,

und folglich die dreyeckige Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

§. 84.

Da die viereckigen Zahlen mit den Quadraten einer-

ley ſind, ſo hat die Sache keine Schwierigkeit. Denn ſetzt man die gegebene viereckige Zahl $= a$, und ihre Viereckswurzel $= x$, ſo wird $x^2 = a$ und alſo $x = \sqrt{a}$. Alſo daß die Quadratwurzel und Viereckswurzel einerley ſind.

§. 85.

Wir wollen alſo zu den fünfeckigen Zahlen fortſchreiten.

Es ſey 22 eine fünfeckige Zahl, und die Wurzel derſelben $= x$, ſo muß (§. 78.) ſeyn $\frac{3xx - x}{2} = 22$, oder $3x^2 - x = 44$, oder $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{44}{3}$; woraus nach der obigen Regel (§. 68.) gefunden wird

$$x = \frac{1}{6} + \sqrt{(\tfrac{1}{36} + \tfrac{44}{3})},\ \text{d. i. } x = \frac{1 + \sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4.$$

Alſo iſt 4 die geſuchte Fünfeckswurzel aus der Zahl 22.

§. 86.

Es ſey nun dieſe Frage vorgelegt: wenn das gegebene Fünfeck $= a$ iſt, wie ſoll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man die verlangte Wurzel $= x$, ſo kömmt man auf dieſe Gleichung $\frac{3xx - x}{2} = a$, oder $3x^2 - x = 2a$, oder $x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{2a}{3}$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)},\ \text{d. i. } x = \frac{1 + \sqrt{(24a + 1)}}{6}.$$

Wenn daher a ein wirkliches Fünfeck iſt, ſo muß $24a + 1$ immer eine Quadratzahl ſeyn.

Es ſey z. B. 330 das gegebene Fünfeck, ſo wird die Wurzel davon ſeyn $x = \frac{1 + \sqrt{7921}}{6} = \frac{1 + 89}{6} = 15$.

§. 87.

Es ſey a eine gegebene ſechseckige Zahl, wovon die Wurzel geſucht werden ſoll.

Setzt man dieſe Wurzel $=x$, ſo wird nach der oben (§. 78.) gegebenen Regel $2x^2-x=a$, oder $x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}a$; woraus nun gefunden wird

$$x=\frac{1}{4}+\sqrt{(\frac{1}{16}+\frac{1}{2}a)}=\frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}.$$

Wenn alſo a ein wirkliches Sechseck iſt, ſo muß $8a+1$ ein Quadrat werden; woraus man ſieht, daß alle ſechseckigen Zahlen unter den dreyeckigen begriffen ſind; die Wurzeln aber ſind anders beſchaffen.

Es ſey z. B. die ſechseckige Zahl 1225, ſo wird die Wurzel davon ſeyn $x=\frac{1+\sqrt{9801}}{4}=\frac{1+99}{4}=25$.

§. 88.

Es ſey ferner a eine gegebene ſiebeneckige Zahl, wovon die Seite oder Wurzel geſucht werden ſoll.

Setzt man dieſe Wurzel $=x$, ſo hat man $\frac{5xx-3x}{2}=a$ (§. 78.) oder $5x^2-3x=2a$, alſo $x^2-\frac{3}{5}x=\frac{2}{5}a$; woraus ferner gefunden wird (§. 68.)

$$x=\frac{3}{10}+\sqrt{(\frac{9}{100}+\frac{2}{5}a)}=\frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}.$$

Alle ſiebeneckige Zahlen ſind demnach ſo beſchaffen, daß, wenn man dieſelben mit 40 multiplicirt und zum Produkte 9 addirt, die Summen immer Quadratzahlen werden.

Es ſey z. B. das gegebene Siebeneck 2059, ſo findet man die Wurzel davon

$$x=\frac{3+\sqrt{(82369)}}{10}=\frac{3+287}{10}=29.$$

§. 89.

Es ſey nun a eine gegebene achteckige Zahl, wovon die Wurzel x gefunden werden ſoll.

Man hat daher $3x^2-2x=a$ (§. 78.) oder $x^2-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird

$$x=\frac{1}{3}+\sqrt{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}a)}=\frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}.$$

Alle achteckige Zahlen ſind demnach ſo beſchaffen, daß, wenn man ſie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt, die Summe immer eine Quadratzahl werde.

Es ſey z. B. 3816 eine achteckige Zahl, ſo wird die Wurzel davon ſeyn

$$x = \frac{1 + \sqrt{11449}}{3} = \frac{1 + 107}{3} = 36.$$

§. 90.

Es ſey endlich a eine gegebene neckige Zahl, wovon die Wurzel x geſucht werden ſoll, ſo hat man (§. 78.) dieſe Gleichung in Erwägung zu ziehen:

$$\frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2} = a, \text{ oder } (n-2)x^2 - (n-4)x = 2a,$$

alſo $x^2 = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)} \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{n-4+\sqrt{(8(n-2)a+(n-4)^2)}}{2(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält, aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckige Wurzeln zu finden.

Es ſey z. B. die 24eckige Zahl 3009 gegeben, aus welcher die Wurzel geſucht werden ſoll. Weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n - 2 = 22$ und $n - 4 = 20$, ſo bekommen wir die Wurzel durch folgende Gleichung:

$$x = \frac{20 + \sqrt{(529584 + 400)}}{44} = \frac{20 + 728}{44} = 17.$$

Achtes Kapitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien.

---

§. 91.

Ein Binomium wird hier eine aus zwey Theilen beſtehende Zahl genannt, wovon eine oder auch beyde das quadratiſche Wurzelzeichen enthalten.

Alſo iſt $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, ingleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es iſt gleich viel, ob dieſe beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden ſind. Daher heißt $3-\sqrt{5}$ eben ſowohl ein Binomium, als $3+\sqrt{5}$.

§. 92.

Dieſe Binomien ſind hauptſächlich deswegen merkwürdig, weil man bey Auflöſung der quadratiſchen Gleichungen jedesmal auf ſolche Formeln kömmt, ſo oft die Auflöſung nicht geſchehen kann.

Alſo wenn z. B. dieſe Gleichung vorkömmt: $x^2=6x-4$, ſo wird $x=3+\sqrt{5}$. Aus dieſer Urſache kommen nun ſolche Formeln in den algebraiſchen Rechnungen ſehr häufig vor, und wir haben auch ſchon oben gezeigt, wie damit die vier gewöhnlichen Rechnungen, nemlich die Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion angeſtellt werden ſollen. Jetzt aber ſind wir erſt im Stande zu zeigen, wie aus ſolchen Formeln auch die Quadratwurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine ſolche Ausziehung Statt findet, indem widrigenfalls nur noch ein Wurzelzeichen vorgeſetzt wird, nemlich von $3+\sqrt{2}$ iſt die Quadratwurzel $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$.

§. 93.

Man hat alſo zuvörderſt zu bemerken, daß die Quadrate von ſolchen Binomien wiederum dergleichen

Binomien werden, in welchen ſogar der eine Theil rational iſt.

Denn ſucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, ſo wird daſſelbe $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$. Wenn alſo von dieſer Formel $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadratwurzel verlangt würde, ſo wäre dieſelbe $a + \sqrt{b}$, welches ohnſtreitig deutlicher zu begreifen iſt, als wenn man vor jene Formel noch das $\sqrt{\ }$ Zeichen ſetzen wollte. Eben ſo, wenn man von dieſer Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, ſo wird daſſelbe $(a + b) + 2\sqrt{ab}$; daher auch umgekehrt von dieſer Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadratwurzel ſeyn wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; welcher Ausdruck wiederum verſtändlicher iſt, als wenn man vor jene Formel noch das Wurzelzeichen ſetzen wollte.

§. 94.

Es kömmt daher vorzüglich darauf an, wie ein Kennzeichen zu finden ſey, woraus in einem jeglichen Falle beurtheilt werden kann, ob eine ſolche Quadratwurzel Statt finde oder nicht. Wir wollen zu dieſem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen, und ſehen, ob man aus dieſem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel finden könne.

Man ſetze alſo, dieſe Wurzel ſey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x + y) + 2\sqrt{xy}$ iſt; alſo muß dieſes Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich ſeyn. Folglich muß der rationale Theil $x + y$ gleich ſeyn 5, und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich ſeyn $2\sqrt{6}$; daher bekömmt man $\sqrt{xy} = \sqrt{6}$, und die Quadrate genommen $xy = 6$. Da nun $x + y = 5$, ſo wird hieraus $y = 5 - x$, welcher Werth in die Gleichung $xy = 6$ geſetzt, $5x - x^2 = 6$ oder $x^2 = 5x - 6$ giebt; daher $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} - \frac{24}{4})} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$; alſo $x = 3$ und $y = 2$. Folglich wird aus $5 + 2\sqrt{6}$ die Quadratwurzel $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ſeyn.

§. 95.

Da wir itzt dieſe beyde Gleichungen erhalten haben: I) $x+y=5$ und II.) $xy=6$, ſo wollen wir hier noch einen andern Weg anzeigen, um x und y leicht zu finden. Da $x+y=5$, ſo nehme man die Quadrate $x^2+2xy+y^2=25$. Nun bemerke man, daß $x^2-2xy+y^2$ das Quadrat von $x-y$ iſt. Man ſubtrahire daher von jener Gleichung, nemlich von $x^2+2xy+y^2=25$, dieſe $xy=6$ viermal genommen, d. i. $4xy=24$, ſo erhält man $x^2-2xy+y^2=1$, und wenn man hieraus die Quadratwurzel zieht, $x-y=1$, ſo wird, weil $x+y=5$ iſt, wenn man die beyden Gleichungen $x-y=1$ und $x+y=5$ addirt, $2x=6$, und daher $x=3$, folglich $y=5-x=2$. Daher die geſuchte Quadratwurzel von $5+2\sqrt{6}$ ſeyn muß $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

§. 96.

Laßt uns nun dieſes allgemeine Binomium $a+\sqrt{b}$ betrachten, und die Quadratwurzel davon $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ſetzen, ſo erhalten wir dieſe Gleichung *): $(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}$, alſo $x+y=a$ und $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ oder $4xy=b$. Von $x+y$ iſt das Quadrat $x^2+2xy+y^2=a^2$; hiervon die Gleichung $4xy=b$ ſubtrahirt, giebt $x^2-2xy+y^2=a^2-b$, wovon die Quadratwurzel $x-y=\sqrt{(a^2-b)}$ iſt. Da nun $x+y=a$, ſo finden wir $x=\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}$ und $y=\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}$; daher die verlangte Quadratwurzel aus dem Binomio $a+\sqrt{b}$ ſeyn wird:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}.$$

*) Dieſe Parentheſen ſind hier nicht ſchlechterdings nothwendig; man bedient ſich derſelben nur, um den rationalen von dem irrationalen Theile der Formel zu unterſcheiden.

§. 97.

Dieſe Formel iſt allerdings verwirrter, als wenn man vor das gegebene Binomium $a+\sqrt{b}$ ſchlechtweg das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ geſetzt hätte, nemlich $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wenn die Zahlen a und b ſo beſchaffen ſind, daß $aa-b$ ein Quadrat wird; weil alsdenn das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in ſolchen Fällen aus dem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadratwurzel bequem ausziehen könne, wenn $aa-b=cc$; denn alsdenn wird die geſuchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ſeyn. Wenn aber $aa-b$ keine Quadratzahl iſt, ſo läßt ſich die Quadratwurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorſetzung des Wurzelzeichens.

§. 98.

Iſt das Binomium nicht $a+\sqrt{b}$, ſondern $a-\sqrt{b}$, ſo wird, bey der vorigen Vorausſetzung, daß $aa-b=cc$, die Quadratwurzel aus demſelben nothwendig $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ſeyn müſſen. Denn nimmt man von dieſer Formel das Quadrat, ſo wird ſolches $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$. Da nun $cc=aa-b$, ſo iſt $aa-cc=b$; daher dieſes Quadrat $=a-2\sqrt{\frac{b}{4}}=a-\frac{2\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}$.

§. 99.

Wenn alſo aus einem ſolchen Binomio $a\pm\sqrt{b}$ die Quadratwurzel gezogen werden ſoll, ſo ſubtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b; aus dem Reſte ziehet man die Quadratwurzel, welche hier durch den Buchſtaben c ausgedrückt wird, ſo iſt die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

Man ſuche z. B. die Quadratwurzel aus $2+\sqrt{3}$, ſo iſt $a=2$ und $b=3$; daher $aa-b=cc=4-3=1$ und alſo $c=1$; folglich die verlangte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Es ſey ferner dieſes Binomium gegeben $11+6\sqrt{2}$, woraus die Quadratwurzel gefunden werden ſoll. Hier iſt nun $a=11$ und $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$; daher $b=36\times2=72$ und $aa-b=49$; folglich $c=7$. Daher die Quadratwurzel aus dem Binomio $11+6\sqrt{2}$ ſeyn wird: $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.

Man ſuche die Quadratwurzel aus $11-2\sqrt{30}$, ſo iſt hier $a=11$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$; daher $b=4\times30=120$ und $aa-b=1$ und $c=1$. Folglich die geſuchte Quadratwurzel $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

§. 100.

Dieſe Regel findet auch Statt, wenn ſogar imaginäre oder unmögliche Zahlen vorkommen.

Es ſey z. B. dieſes Binomium $1+4\sqrt{-3}$ gegeben, ſo iſt $a=1$ und $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$; daher $b=-48$ und $aa-b=49$. Folglich $c=7$ und die geſuchte Quadratwurzel $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Es ſey ferner gegeben $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier iſt $a=-\frac{1}{2}$, $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b=\frac{1}{4}\times-3=-\frac{3}{4}$; daher $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ und $c=1$; folglich die geſuchte Quadratwurzel $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}$ oder $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Noch iſt dieſer Fall merkwürdig, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadratwurzel geſucht werden ſoll.

Weil hier kein rationaler Theil iſt, ſo iſt $a=0$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$; daher $b=-4$ und $aa-b=4$, alſo $c=2$, woraus die geſuchte Quadratwurzel iſt: $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$, wovon das Quadrat iſt: $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

§. 101.

Sollte auch eine Gleichung aufzulöſen vorfallen, wie folgende: $xx = a \pm \sqrt{b}$ und es wäre $aa - b = cc$, ſo würde man daraus dieſen Werth für x erhalten: $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$, welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es ſey z. B. $xx = 17 + 12\sqrt{2}$, ſo wird $x = 3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$.

§. 102.

Dieſes findet inſonderheit bey Auflöſung einiger Gleichungen vom vierten Grade Statt, als $x^4 = 2axx + d$. Denn ſetzt man hier $xx = y$, ſo wird $x^4 = yy$, und die vorige Gleichung $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(aa + d)}$; daher für die angenommene Gleichung ſeyn wird $xx = a \pm \sqrt{(aa + d)}$, woraus folglich noch die Quadratwurzel gezogen werden muß. Da nun hier $\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)}$ alſo $b = aa + d$, ſo wird $aa - b = -d$. Wäre nun $-d$ ein Quadrat, nemlich cc oder $d = -cc$, ſo kann die Wurzel angezeigt werden. Es ſey alſo $d = -cc$, oder es ſey dieſe Gleichung vom vierten Grade gegeben $x^4 = 2axx - cc$, ſo wird daraus der Werth von x alſo ausgedrückt $x = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$.

§. 103.

Wir wollen dieſes durch einige Exempel erläutern:

I. Erſtlich ſuche man zwey Zahlen, deren Produkt 105, und wenn man ihre Quadrate zuſammen addirt, die Summe $= 274$ ſey.

Man ſetze, dieſe Zahlen ſeyen x und y, ſo hat man ſogleich dieſe zwey Gleichungen I.) $xy = 105$ und II.) $xx + yy = 274$.

Aus der erſten findet man $y = \frac{105}{x}$, welcher Werth in der andern anſtatt y geſetzt, $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$ giebt. Mit xx multiplicirt, wird $x^4 + 105^2 = 274xx$, oder $x^4 = 274xx - 105^2$.

Vergleicht man nun dieſe Gleichung mit der obigen, ſo wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; daher $c = 105$ und $a = 137$. Alſo finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137+105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137-105}{2}} = 11 \pm 4;$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erſtern Falle wird $y = 7$, im letzteren aber $y = 15$. Daher die beyden geſuchten Zahlen 15 und 7 ſind.

§. 104.

Es iſt hier aber zu bemerken, daß dieſe Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Denn da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein Quadrat iſt, wir aber wiſſen, was ſowohl $xx + yy$ als xy iſt, ſo dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, ſowohl zu dem erſten addiren, als auch davon ſubtrahiren, wie folgende Rechnung lehrt:

$$xx + yy = 274$$
Hierzu add. $$2xy = 210$$
giebt $$xx + 2xy + yy = 484$$
Folglich $$\sqrt{(xx + 2xy + yy)} = \sqrt{484}$$
d. i. $$x + y = 22$$

Wird nun ferner $2xy$ von $xx + yy$ ſubtrahirt, ſo erhält man $$xx - 2xy + yy = 64$$
folglich $$x - y = 8.$$
Alſo $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet, daß $x = 15$ und $y = 7$. Auf dieſe Art kann auch folgende allgemeine Aufgabe aufgelöſet werden.

II. Man ſuche zwey Zahlen, wovon das Produkt $= m$, und die Summe ihrer Quadrate $= n$ iſt.

Die geſuchten Zahlen ſeyen x und y, ſo hat man die beyden folgenden Gleichungen: I.) $xy = m$, und II.) $xx + yy = n$. Nun aber iſt $2xy = 2m$, woraus erſtlich, wenn man $2xy$ addirt, $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$ wird.

Hierauf $2xy$ ſubtrahirt, giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$.

Alſo $x = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} + \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$ und $y = \frac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} - \frac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}$.

§. 105.

III. Es ſey ferner dieſe Aufgabe vorgelegt: man ſuche zwey Zahlen, deren Produkt $= 35$, und die Differenz ihrer Quadrate $= 24$ iſt.

Es ſey x die größere, und y die kleinere, ſo hat man dieſe beyde Gleichungen $xy = 35$ und $xx - yy = 24$. Da nun hier die vorigen Vortheile nicht Statt finden, ſo verfahre man nach der gewöhnlichen Weiſe, und da giebt die erſte Gleichung $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y geſetzt, $xx - \frac{1225}{xx} = 24$ giebt. Wenn man nun mit xx multiplicirt, ſo hat man $x^4 - 1225 = 24xx$ und $x^4 = 24xx + 1225$. Da hier das letzte Glied das Zeichen + hat, ſo kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nemlich $cc = -1225$, und alſo c imaginär würde.

Man ſetze daher $xx = z$, ſo hat man $zz = 24z + 1225$; woraus gefunden wird $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ oder $z = 12 \pm 37$; daher $xx = 12 \pm 37$, d. i. entweder $xx = 49$ oder $xx = -25$.

Nach dem erſten Werthe wird $x = 7$ und $y = 5$.

Nach dem andern aber wird $x = \sqrt{-25}$ und $y = \frac{35}{\sqrt{-25}}$ oder $y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}$, oder $y = \sqrt{-49}$.

§. 106.

Zum Beſchluß dieſes Kapitels wollen wir noch ein Paar Aufgaben beyfügen:

IV. Man ſuche zwey Zahlen, deren Summe, Produkt, und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich ſind.

Die größere Zahl ſey x, die kleinere y, ſo müſſen dieſe drey Formeln einander gleich ſeyn: I.) Summe $x+y$, II.) Produkt xy, III.) Differenz der Quadrate $xx-yy$. Vergleicht man die erſte mit der zweyten, ſo hat man $x+y=xy$, und daraus ſuche man x. Man wird alſo haben $y=xy-x$ oder $y=x(y-1)$, und daraus wird $x=\frac{y}{y-1}$; daher wird, wenn man beyderſeits $y=y$ addirt,

$x+y=y+\frac{y}{y-1}=\frac{yy}{y-1}$ und $xy=\frac{yy}{y-1}$, und alſo iſt die Summe dem Produkt ſchon gleich. Dieſem muß aber noch die Differenz der Quadrate gleich ſeyn. Nun iſt $xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4-2y^3}{yy-2y+1}$, welches dem obigen Werthe $\frac{yy}{y-1}$ gleich ſeyn muß. Daher bekömmt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; dieſes durch yy dividirt, wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt, wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$, und nochmals mit $y-1$ multiplicirt, giebt $y-1=-yy+2y$; folglich $yy=y+1$. Hieraus findet man (§. 68.) $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{1}{4}+1)}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ oder $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; und daher erhalten wir, wenn wir in der vorhin gefundnen Gleichung $x=\frac{y}{y-1}$

anſtatt y deſſen Werth $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ſetzen, $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.
Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, ſo multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$; denn auf dieſe Art bekömmt man
$x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Folglich iſt die größere der geſuchten Zahlen $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ihre Summe iſt alſo $x+y=2+\sqrt{5}$, ferner das Produkt $xy=2+\sqrt{5}$, und da $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, ſo wird die Differenz der Quadrate $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

§. 107.

Weil dieſe Auflöſung ziemlich mühſam war, ſo ſoll noch gezeigt werden, wie man das Geſuchte auch auf eine andre und leichtere Art finden könne. Man ſetze erſtlich die Summe $x+y$ der Differenz der Quadrate $xx-yy$ gleich, ſo hat man $x+y=xx-yy$. Hier kann man durch $x+y$ dividiren, weil $xx-yy=(x+y)(x-y)$, und da erhält man $1=x-y$, folglich $x=y+1$; daher $x+y=2y+1$ und $xx-yy=2y+1$, welchem noch das Produkt $xy=yy+y$ gleich ſeyn muß. Man hat alſo $yy+y=2y+1$, oder $yy=y+1$, aus welcher quadratiſchen Gleichung, nach der oben (§. 68.) gegebenen Regel *), wie vorhin, gefunden wird $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

---

*) Bey Anwendung dieſer Regel müſſen Anfänger nur nicht den Umſtand überſehen, daß, weil kein Coefficient bey y ſtehet, der in der allgemeinen Formel (§. 68.) angenommene Coefficient $p=1$ ſeyn muß.

§. 108.

V. Dieſes leitet uns noch auf folgende Aufgabe: Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt und die Summe ihrer Quadrate einander gleich ſind.

Die geſuchten Zahlen ſeyen x und y, ſo müſſen dieſe drey Formeln einander gleich ſeyn: I.) $x + y$, II.) xy, und III.) $xx + yy$.

Setzt man die erſte der zweyten gleich $x + y = xy$, ſo findet man daraus $y = xy - x = (y - 1)x$, und wenn man auf beyden Seiten mit $y - 1$ dividiret, $\frac{y}{y-1} = x$, ferner $x + y = \frac{y}{y-1} + y = \frac{y^2}{y-1}$, welchem auch xy gleich iſt. Hieraus aber wird $xx + yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} + yy$, welches dem $\frac{yy}{y-1}$ gleich zu ſetzen. Man multiplicire mit $yy - 2y + 1$, ſo bekömmt man $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^3 - yy$ oder $y^4 = 3y^3 - 3yy$, und durch yy dividirt $yy = 3y - 3$; daher $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 3)}$, oder $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$; daher $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, ſo wird $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$.

Alſo ſind die beyden geſuchten Zahlen $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$ und $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, ihre Summe iſt $x + y = 3$, das Produkt $xy = 3$, und da endlich $xx = \frac{3 - 3\sqrt{-3}}{2}$ und $yy = \frac{3 + 3\sqrt{-3}}{2}$, ſo wird auch $xx + yy = 3$.

§. 109.

Dieſe Rechnung kann durch einen beſondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welcher auch in an-

dern Fällen Statt findet. Derſelbe beſteht darin, daß man die geſuchten Zahlen nicht durch einzelne Buchſtaben, ſondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Alſo bey der vorigen Aufgabe ſetze man die eine der geſuchten Zahlen gleich $p + q$ und, die andere $p - q$, ſo wird die Summe derſelben ſeyn $2p$, ihr Product $pp - qq$, und die Summe ihrer Quadrate $2pp + 2qq$, welche drey Stücke einander gleich ſeyn müſſen. Man ſetze das erſte dem zweyten gleich, ſo wird $2p = pp - qq$, und daraus $qq = pp - 2p$. Dieſen Werth ſetze man im dritten für qq, ſo erhält man $4pp - 4p$. Welches dem erſten gleich geſetzt, $2p = 4pp - 4p$ giebt. Man addire $4p$, ſo wird $6p = 4pp$, durch p dividirt $6 = 4p$ und alſo $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Hieraus findet man $qq = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Folglich iſt die erſte von unſern geſuchten Zahlen $p + q = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$, und die andere $p - q = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$, ſo wie wir ſie vorher gefunden haben.

Neuntes Kapitel.

Von der Natur der quadratiſchen Gleichungen.

§. 110.

In dem fünften Kapitel (§. 58. 59.) iſt bereits hinlänglich gezeigt worden, daß die quadratiſchen Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöſt werden können, welche Eigenſchaft allerdings in Erwägung gezogen zu werden verdienet, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen daher nunmehr

genauer unterſuchen, woher es komme, daß eine jede quadratiſche Gleichung zweyerley Auflöſungen zulaſſe; weil darin ohnſtreitig eine ſehr weſentliche Eigenſchaft dieſer Gleichungen enthalten iſt.

§. 111.

Man hat zwar ſchon geſehen, daß dieſe doppelte Auflöſung daher rühret, weil die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl ſowohl negativ als poſitiv geſetzt werden könne. Allein dieſer Grund würde ſich nicht auf höhere Gleichungen anwenden laſſen; daher wird es gut ſeyn, den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es iſt daher nöthig zu erklären, woher es komme, daß eine quadratiſche Gleichung, z. B. $xx = 12x - 35$, auf eine doppelte Art aufgelöſet werden könne, oder daß ſich für x zweyerley Werthe, welche beyde der Gleichung ein Genüge leiſten, angeben laſſen, wie in dieſem Beyſpiel anſtatt x ſowohl 5 als auch 7 geſetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

§. 112.

Um den Grund hiervon deutlicher einzuſehen, ſo iſt es dienlich, alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, ſo daß auf der andern 0 zu ſtehen kömmt. Daher die obige Gleichung ſeyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobey es erſtlich darauf ankömmt, daß eine ſolche Zahl gefunden werde, wodurch, wenn man ſie für x ſetzt, die Formel $xx - 12x + 35$ wirklich in nichts verwandelt wird; hernach aber muß auch die Urſache gezeigt werden, warum ſolches auf zweyerley Art geſchehen könne.

§. 113.

Hier muß alſo vor allen Dingen deutlich gezeigt werden, daß man eine ſolche Formel wie $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren anſehen könne, wie denn dieſe Formel wirklich aus dieſen zwey Factoren

$(x-5)\times(x-7)$ beſteht. Wenn daher jene Formel 0 werden ſoll, ſo muß auch dieſes Product $(x-5)\times(x-7)=0$ ſeyn. Ein Product aber, aus ſo viel Factoren daſſelbe auch immer beſtehen mag, wird allezeit 0, wenn nur einer von ſeinen Factoren 0 wird. Denn ſo groß auch das Product aus den übrigen Factoren ſeyn mag, wenn daſſelbe noch mit 0 multiplicirt wird, ſo kömmt immer 0 heraus, welcher Grundſatz für die höhern Gleichungen wohl zu merken iſt.

§. 114.

Hieraus begreift man nun ganz deutlich, daß dieſes Product $(x-5)\times(x-7)$ auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmal nemlich, wenn der erſte Factor $x-5=0$ wird, und hernach auch, wenn der andere Factor $x-7=0$ wird. Das erſtere geſchiehet, wenn $x=5$, das andere aber, wenn $x=7$ iſt. Hieraus verſteht man alſo den wahren Grund, warum eine ſolche Gleichung wie $xx-12x+35=0$, zweyerley Auflöſungen zuläßt, oder warum für x zwey Werthe gefunden werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leiſten.

Der Grund beſteht nemlich darin, daß ſich die Formel $xx-12x+35$ als ein Product aus zwey Factoren vorſtellen läßt.

§. 115.

Eben dieſer Umſtand findet bey allen quadratiſchen Gleichungen Statt. Denn wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, ſo erhält man immer eine ſolche Formel wie $xx-ax+b=0$, und dieſe Formel kann ebenfalls als ein Product aus zwey Factoren angeſehen werden, welche wir auf folgende Art vorſtellen wollen: $(x-p)\times(x-q)$, ohne uns darum zu bekümmern, was p und q für Zahlen ſeyn mögen. Da nun unſere Gleichung erfordert, daß dieſes Product $=0$ werde, ſo iſt offenbar, daß ſolches auf zweyerley Art geſchehen könne: erſtlich, wenn $x=p$, und zweytens, wenn $x=q$, wel-

ches die beyden Werthe für x ſind, die der Gleichung ein Genüge leiſten.

§. 116.

Wir wollen nun ſehen, wie dieſe zwey Factoren beſchaffen ſeyn müſſen, daß derſelben Product juſt unſere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe. Man multiplicire demnach dieſelben wirklich, so erhält man den Ausdruck $xx - (p + q)x + pq$; und da dieſer mit der Formel $xx - ax + b$ einerley ſeyn kann, ſo iſt klar, daß $p + q = a$ und $pq = b$ ſeyn muß; woraus wir dieſe herrliche Eigenſchaft einer ſolchen Gleichung $xx - ax + b = o$ erkennen, daß erſtlich die Summe der beyden Werthe von x der Zahl a, und ihr Product der Zahl b gleich ſey. Sobald man alſo einen Werth kennt, ſo iſt auch leicht der andere zu finden.

§. 117.

Dieſes war der Fall, wenn beyde Werthe für x poſitiv ſind, da denn in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen $-$, das dritte aber das Zeichen $+$ hat. Wir wollen daher nunmehr auch die Fälle erwägen, wenn einer der beyden Werthe von x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geſchiehet, wenn die beyden Factoren der Gleichung alſo beſchaffen ſind: $(x - p)(x + q)$; woher dieſe zwey Werthe für x entſpringen, erſtlich $x = p$, und zweytens $x = -q$. Die Gleichung ſelbſt aber iſt alsdenn $xx + (q - p)x - pq = o$, wo das zweyte Glied das Zeichen $+$ hat, wenn nemlich q größer iſt als p. Wäre hingegen q kleiner als p, ſo müßte es das Zeichen $-$ haben; das dritte Glied aber iſt hier immer negativ.

Wären die beyden Factoren $(x + p)(x + q)$, ſo wären beyde Werthe von x negativ, nemlich $x = -p$ und $x = -q$, und die Gleichung ſelbſt würde ſeyn $xx + (p + q)x + pq = o$, wo ſowohl das zweyte, als auch das dritte Glied das Zeichen $+$ haben muß.

§. 118.

Hieraus erkennen wir nun die Beſchaffenheit der Wurzeln einer jeden quadratiſchen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es ſey die Gleichung $xx \ldots ax \ldots b = 0$. Wenn nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, ſo ſind beyde Werthe negativ. Iſt das zweyte Glied negativ, das dritte aber poſitiv, ſo ſind beyde Werthe poſitiv; iſt aber blos das dritte Glied negativ, ſo iſt ein Werth poſitiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

§. 119.

Es iſt alſo ganz leicht, ſolche quadratiſche Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene Werthe in ſich enthalten. Man verlangt z. B. eine ſolche Gleichung, wo der eine Werth von x die poſitive Zahl 7, der andere aber -3 ſeyn ſoll. Man mache daraus dieſe einfachen Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$, und aus denſelben ferner dieſe $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung ſeyn werden, durch deren Multiplication die Gleichung ſelbſt erhalten wird, nemlich $xx - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regel eben dieſe beyden Werthe für x gefunden werden. Denn da $xx = 4x + 21$, ſo wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, alſo $x = 2 \pm 5$, und daher entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

§. 120.

Es kann auch geſchehen, daß beyde Werthe der unbekannten Größe x einander gleich werden. Man ſuche z. B. eine Gleichung, wo beyde Werthe von x der Zahl 5 gleich ſind. Die beyden Factoren werden alſo ſeyn $(x-5)(x-5)$, und die Gleichung ſelbſt iſt alſo beſchaffen: $xx - 10x + 25 = 0$, welche nur einen Werth zu haben ſcheinet, weil auf eine doppelte Art $x = 5$ wird, wie auch die gewöhnliche Auflöſung zeigt. Denn

da $xx = 10x - 25$, ſo wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$, und daher wird $x = 5$ und $x = 5$.

§. 121.

Inſonderheit iſt hier noch zu merken, daß bisweilen beyde Werthe von x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es ganz und gar unmöglich iſt, einen ſolchen Werth für x anzuzeigen, welcher der Gleichung ein Genüge leiſtet; wie z. B. geſchiehet, wenn die Zahl 10 in zwey ſolche Theile getheilt werden ſoll, deren Product 30 beträgt. Denn es ſey der eine Theil $= x$, ſo wird der andere $10 - x$ ſeyn, und alſo ihr Product $10x - xx = 30$; folglich $xx = 10x - 30$ und $x = 3 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl iſt, und zu erkennen giebt, daß die Auflöſung der Aufgabe unmöglich ſey.

§. 122.

Es iſt alſo ſehr wichtig, ein Kennzeichen ausfindig zu machen, woraus man ſogleich erkennen kann, ob eine quadratiſche Gleichung etwas mögliches enthalte oder nicht. Es ſey daher dieſe allgemeine Gleichung gegeben: $xx - ax + b = 0$, ſo wird $xx = ax - b$, und $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$; woraus erhellet, daß, wenn die Zahl b größer iſt als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beyden Werthe unmöglich werden; weil man aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel ausziehen müßte. So lange aber b kleiner iſt als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, d. i. negativ, ſo ſind die beyden Werthe immer möglich. Dieſelben mögen inzwiſchen möglich oder unmöglich ſeyn, ſo können ſie doch nach dieſer Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer dieſe Eigenſchaft, daß ihre Summe $= a$ und ihr Product $= b$ iſt, wie man aus folgendem Beyſpiele erſehen kann: $xx - 6x + 10 = 0$, wo die Summe der beyden Werthe für x ſeyn muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber dieſe beyden

Werthe: I.) $x = 3 + \sqrt{-1}$ und II.) $x = 3 - \sqrt{-1}$, deren Summe $= 6$ und deren Product $= 10$ iſt.

§. 123.

Man kann dieſes Kennzeichen auf eine ſo allgemeine Art ausdrücken, daß es ſich auch auf ſolche Gleichungen anwenden läßt, wie $fxx \pm gx + h = 0$.

Denn hieraus erhält man $xx = \pm \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ (§. 68.)

daher $x = \pm \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)}$,

oder $x = \frac{\pm g \pm \sqrt{(gg - 4fh)}}{2f}$,

woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär, oder die Gleichung unmöglich werde, wenn $4fh$ größer iſt als gg, oder wenn in dieſer Gleichung $fxx \pm gx + h = 0$ das vierfache Product aus dem erſten und letzten Gliede größer iſt, als das Quadrat des zweyten Gliedes. Denn das vierfache Product aus dem erſten und letzten Gliede iſt $4fhxx$, das Quadrat des mittlern Gliedes aber iſt $ggxx$. Iſt nun $4fhxx$ größer als $ggxx$, ſo iſt auch $4fh$ größer als gg, und alſo die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber iſt die Gleichung möglich, und die beyden Werthe von x können wirklich angegeben werden, wenn dieſelben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werthe gelangen kann, wie oben bemerkt worden iſt; da hingegen bey imaginären Ausdrücken, als $\sqrt{-5}$, auch keine Näherung Statt findet, indem 100 davon eben ſo weit entfernt iſt, als 1 oder irgend eine andere Zahl.

§. 124.

Hierbey iſt noch zu erinnern, daß eine jegliche ſolche Formel vom zweyten Grade wie $xx \pm ax \pm b$ allezeit nur in zwey ſolche Factoren $(x \pm p)(x \pm q)$ aufgelöſt werden kann. Denn wenn man drey ſolche Factoren nehmen

wollte, ſo würde man zum dritten Grade kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grade anſteigen. Daher es eine ausgemachte Sache iſt, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grade nothwendig zwey Werthe von x in ſich enthalte, und daß derſelben weder mehr, noch weniger ſeyn können.

§. 125.

Man hat ſchon geſehen, daß, wenn dieſe beyden Factoren gefunden worden ſind, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen könne, indem ein jeder Factor, wenn er gleich o geſetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieſes findet auch umgekehrt Statt, daß, ſo bald man einen Werth für x gefunden hat, daraus auch ein Factor der quadratiſchen Gleichung erkannt werde. Denn wenn p ein Werth von x in einer quadratiſchen Gleichung und daher $x = p$ iſt, ſo muß auch $x - p$ ein Factor derſelben ſeyn; oder die Gleichung, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht worden ſind, läßt ſich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

§. 126.

Um dieſes zu erläutern, ſo ſey folgende Gleichung gegeben: $xx + 4x - 21 = 0$, von welcher wir wiſſen, daß 3 ein Werth von x, d. i. $x = 3$ ſey, indem $3^2 + 4 \times 3 - 21 = 0$ iſt; und daher können wir ſicher ſchließen, daß $x - 3$ ein Factor dieſer Gleichung ſey, oder daß ſich $xx + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen laſſe, wie aus dieſer Diviſion zu erſehen iſt.

$$
\begin{array}{l}
x - 3)\,xx + 4x - 21\,(x + 7 \\
\quad\;\; \underline{xx - 3x} \\
\qquad\qquad\; 7x - 21 \\
\qquad\qquad\; \underline{7x - 21} \\
\qquad\qquad\quad\;\; 0
\end{array}
$$

Alſo iſt der andere Factor $x + 7$, und unſere Gleichung wird durch dieſes Product vorgeſtellt: $(x - 3)(x + 7) = 0$, woraus die beyden Werthe für x ſogleich erhellen, da nemlich aus dem erſten Factor $x = 3$, aus dem andern aber $x = -7$ wird.

Zehntes Kapitel.

Von der Auflöſung der reinen cubiſchen Gleichungen.

§. 127.

Eine reine cubiſche Gleichung wird diejenige genannt, worin der Cubus der unbekannten Zahl einer bekannten Zahl gleich geſetzt wird, ſo daß darin weder das Quadrat der unbekannten Zahl, noch dieſelbe ſelbſt vorkömmt. Eine ſolche Gleichung iſt $x^3 = 125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3 = a$, oder $x^3 = \frac{a}{b}$.

§. 128.

Wie nun aus einer ſolchen Gleichung der Werth von x gefunden werden könne, iſt für ſich offenbar, indem man nur nöthig hat, beyderſeits die Cubikwurzel auszuziehen.

Z. B. aus der Gleichung $x^3 = 125$ findet man $x = 5$, und aus der Gleichung $x^3 = a$ bekömmt man $x = \sqrt[3]{a}$; aus $x^3 = \frac{a}{b}$ aber hat man $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ oder $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Wenn man daher nur die Cubikwurzel aus ei-

ner gegebenen Zahl ausziehen gelernt hat, ſo kann man auch leicht ſolche Gleichungen auflöſen.

§. 129.

Auf dieſe Art aber erhält man nur einen Werth für x. Da nun eine jede quadratiſche Gleichung zwey Werthe hat, ſo kann man mit Grunde vermuthen, daß eine cubiſche Gleichung auch mehr als einen Werth haben müſſe. Es wird daher der Mühe werth ſeyn, dieſe Sache genauer zu unterſuchen, und im Fall eine ſolche Gleichung mehr Werthe für x haben ſollte, dieſelben auch ausfindig zu machen.

§. 130.

Wir wollen z. B. dieſe Gleichung betrachten: $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden ſollen, deren Cubus der Zahl 8 gleicht. Da nun eine ſolche Zahl ohnſtreitig $x = 2$ iſt; ſo muß nach dem vorigen Kapitel die Formel $x^3 - 8 = 0$ ſich nothwendig durch $x - 2$ theilen laſſen. Wir wollen alſo dieſe Theilung folgendergeſtalt verrichten:

$$
\begin{array}{l}
x - 2)\, x^3 - 8\, (xx + 2x + 4 \\
\quad\quad\; x^3 - 2xx \\
\hline
\quad\quad\quad\; 2xx - 8 \\
\quad\quad\quad\; 2xx - 4x \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad 4x - 8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4x - 8 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Alſo läßt ſich unſere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch dieſe Factoren vorſtellen: $(x - 2)(xx + 2x + 4) = 0$.

§. 131.

Da nun die Frage iſt, was für Zahlen für x angenommen werden müſſen, daß $x^3 = 8$, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde, ſo iſt klar, daß dieſes geſchehen müßte, wenn das gefundene Product 0 würde. Daſ-

ſelbe wird aber 0, nicht nur wenn der erſte Factor $x - 2 = 0$, woraus $x = 2$ entſpringt, ſondern auch, wenn der andere Factor $xx + 2x + 4 = 0$ wird. Man ſetze alſo $xx + 2x + 4 = 0$, ſo hat man $xx = -2x - 4$, und daher wird $x = -1 \pm \sqrt{-3}$.

§. 132.

Außer dem Falle alſo $x = 2$, in welchem die Gleichung $x^3 = 8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfalls 8 ſind, nemlich folgende:

I.) $x = -1 + \sqrt{-3}$ und II.) $x = -1 - \sqrt{-3}$, welches außer Zweifel geſetzt wird, wenn man die Cubikzahlen davon nimmt.

$$
\begin{array}{rcr}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\hline
1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3} \\
-\sqrt{-3}-3 & & +\sqrt{-3}-3 \\
\hline
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadrat} & -2+2\sqrt{-3} \\
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\hline
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3} \\
-2\sqrt{-3}+6 & & +2\sqrt{-3}+6 \\
\hline
8 & \text{Cubus} & 8
\end{array}
$$

Dieſe beyden Werthe ſind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts deſto weniger bemerkt zu werden.

§. 133.

Dieſes gilt auch überhaupt von einer jeden dergleichen cubiſchen Gleichung wie z. B. $x^3 = a$, wo außer dem Werthe $x = \sqrt[3]{a}$, noch zwey andere ebenfalls Statt finden. Man ſetze um der Kürze willen $\sqrt[3]{a} = c$, ſo daß $a = c^3$, und unſere Gleichung dieſe Form bekomme,

$x^3 - c^3 = 0$, welche letztere ſich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieſer Diviſion zu ſehen iſt:

$$
\begin{array}{l}
x - c)\, x^3 - c^3\, (xx + cx + cc \\
\quad x^3 - cxx \\
\hline
\quad\quad cxx - c^3 \\
\quad\quad cxx - ccx \\
\hline
\quad\quad\quad ccx - c^3 \\
\quad\quad\quad ccx - c^3 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

Es läßt ſich alſo unſere Gleichung durch dieſes Product vorſtellen $(x - c)(xx + cx + cc) = 0$, welches wirklich 0 wird, nicht nur wenn $x - c = 0$ oder $x = c$, ſondern auch wenn $xx + cx + cc = 0$; daraus aber wird $xx = -cx - cc$ und daher $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{4} - cc\right)}$ oder $x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$ d. i. $x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \times c$ in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten ſind.

§. 134.

Da nun c anſtatt $\sqrt[3]{a}$ geſchrieben worden iſt, ſo ziehen wir daher dieſen Schluß, daß ſich von einer jeden cubiſchen Gleichung von dieſer Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für x angeben laſſen, welche alſo ausgedrückt werden:

I.) $x = \sqrt[3]{a}$

II.) $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{a}$

III.) $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \times \sqrt[3]{a}$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubikwurzel dreyerley Werthe habe, wovon aber nur der erſte möglich, die beyden andern aber unmöglich ſind, welches deswegen hier wohl zu bemerken iſt, weil wir ſchon oben geſehen haben,

daß eine jede Quadratwurzel zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grade vier verſchiedene Werthe, vom fünften Grade fünf dergleichen habe, u. ſ. w.

Bey gemeinen Rechnungen wird zwar nur der erſte von dieſen drey Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich ſind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

§. 135.

I. **Aufgabe.** Suche eine Zahl, deren vierter Theil mit ihrem Quadrate multiplicirt, 432 hervorbringet.

Dieſe Zahl ſey x, ſo muß xx mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden; daher wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$. Mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$, und die Cubikwurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Die geſuchte Zahl iſt alſo 12; denn ihr Quadrat 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, d. i. mit 3, giebt 432.

§. 136.

II. **Aufgabe.** Suche eine Zahl, welche, wenn man ihre vierte Poteſtät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde.

Die Zahl ſey x, ſo iſt ihre vierte Poteſtät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, $2x^3$ giebt; hierzu $14\frac{1}{4}$ addirt, ſoll 100 machen; alſo hat man $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, und, wenn man $14\frac{1}{4}$ ſubtrahirt, $2x^3 = 85\frac{3}{4} = \frac{343}{4}$. Dieſes durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$; und zieht man die Cubikwurzel aus, ſo erhält man $x = \frac{7}{2}$. Daß auch durch die gefundne Zahl $\frac{7}{2}$ der Aufgabe völlig Gnüge geſchieht, läßt ſich leicht darthun. Denn die vierte Dignität von $\frac{7}{2}$ iſt $\frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ d. i. $\frac{2401}{16} = 150\frac{1}{16}$. Dividirt man nun $150\frac{1}{16}$ durch die Hälfte von $\frac{7}{2}$, d. i. durch $\frac{7}{4}$, ſo erhält man $85\frac{3}{4}$, und addirt man hierzu noch $14\frac{1}{4}$, ſo bekömmt man zur Summe 100.

§. 137.

III. Aufgabe. Einige Hauptleute liegen zu Felde; jeder hat unter ſich dreymal ſo viel Reuter, und 20 mal ſo viel Fußgänger als der Hauptleute ſind; und ein Reuter bekömmt Monatsſold gerade ſo viel Gulden, ein Fußgänger aber halb ſo viel Gulden als der Hauptleute ſind, und beträgt der monatliche Sold in allem 1300 Gulden. Wie viel ſind der Hauptleute geweſen?

Es ſeyen x Hauptleute geweſen, ſo hat einer unter ſich gehabt $3x$ Reuter und $20x$ Fußgänger. Alſo die Zahl aller Reuter war $3xx$ und der Fußgänger $20xx$. Da nun ein Reuter x Fl. bekömmt, ein Fußgänger aber $\frac{1}{2}x$ Fl., ſo iſt der monatliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl., der Fußgänger aber $10x^3$ Fl. Beyde zuſammen bekommen alſo $13x^3$ Fl., ſo der Zahl 13000 gleich ſeyn muß. Da nun $13x^3 = 13000$, ſo wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.

Es ſind alſo 10 Hauptleute geweſen; folglich 3×10 d. i. 30 Reuter, und 20×10 d. i. 200 Fußgänger; und weil ein Reuter 10 Fl. und ein Fußgänger 5 Fl. Monatsſold erhalten hat, ſo beträgt der Monatsſold aller Reuter 300 und der Sold der Fußgänger 1000, folglich der monatliche Sold in allem 1300 Gulden.

§. 138.

IV. Aufgabe. Etliche Kaufleute treten zuſammen in Geſellſchaft, und jeder legt 100 mal ſo viel ein, als ihrer ſind. Mit dieſem Capital ſchicken ſie einen Factor nach Venedig, der gewinnt mit jeden 100 Fl. zweymal ſo viel Fl. als ihrer ſind, und nach ſeiner Zurückkunft beträgt der Gewinnſt 2662 Fl. Nun iſt alſo die Frage, wie viel der Kaufleute geweſen ſind.

Es ſeyen x Kaufleute geweſen, ſo hat jeder eingelegt $100x$ Fl., und das ganze Capital war $100xx$ Fl. Da nun mit 100 Fl. $2x$ Fl. gewonnen worden, ſo war der ganze Gewinnſt $2x^3$, welcher der Zahl 2662 gleich ſeyn ſoll. Folglich $2x^3 = 2662$; daher

$x^3 = 1331$, und alſo die geſuchte Anzahl der Kaufleute $x = \sqrt[3]{1331} = 11$.

§. 139.

V. Aufgabe. Eine Bäuerinn vertauſcht Käſe gegen Hühner, und giebt 2 Käſe für 3 Hühner. Die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ ſo viel als der Hühner ſind. Mit denſelben geht ſie auf den Markt, giebt immer 9 Eyer für ſo viel Pfennige als ein Huhn Eyer gelegt hat, und löſet 72 Pfennige; wie viel hat die Bäuerinn Käſe vertauſcht?

Die Zahl der Käſe ſey x geweſen, ſo ſind dieſelben gegen $\frac{3}{2}x$ Hühner vertauſcht worden. Da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, ſo iſt die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}xx$. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf. und alſo wird in allem gelöſt $\frac{1}{24}x^3$. Da nun, vermöge der Aufgabe $\frac{1}{24}x^3 = 72$, folglich $x^3 = 24 . 72 = 8 . 3 . 8 . 9 = 8 . 8 . 3 . 9 = 8 . 8 . 27$, ſo findet man, wenn man die Cubikwurzel auszieht, daß $x = 12$, weil $\sqrt[3]{(8 . 8 . 27)} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27}$, (I. Th. §. 139.), und daß alſo die Bäuerinn 12 Käſe gehabt hat, welche gegen 18 Hühner vertauſcht worden ſind.

Eilftes Kapitel.

Von der Auflöſung der vollſtändigen cubiſchen Gleichungen.

§. 140.

Eine cubiſche Gleichung heißt vollſtändig, wenn darinnen außer dem Cubo der unbekannten Zahl, noch dieſe unbekannte Zahl ſelbſt und ihr Quadrat vorkommen; da-

her die allgemeine Form ſolcher Gleichungen, wenn man nemlich alle Glieder auf eine Seite bringt, folgende iſt:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

Wie man nun aus einer ſolchen Gleichung die Werthe von x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genannt werden, finden könne, ſoll in dieſem Kapitel gezeigt werden. Denn man kann hier ſchon vorausſetzen, daß eine ſolche Gleichung immer drey Wurzeln habe; weil dieſes bereits im vorigen Kapitel von den reinen cubiſchen Gleichungen gezeiget worden iſt.

§. 141.

Wir wollen für den Anfang folgende leichte Gleichung betrachten: $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$; und da eine quadratiſche Gleichung als ein Product aus zwey Factoren angeſehen werden kann, ſo kann man dieſe cubiſche Gleichung als ein Product aus drey Factoren anſehen, welche in dieſem Falle ſind:

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, als welche mit einander multiplicirt, die obige Gleichung hervorbringen. Denn $(x-1) \times (x-2)$ giebt $xx - 3x + 2$, und dieſes noch mit $x - 3$ multiplicirt, giebt $x^3 - 6xx + 11x - 6$, welches die obige Form iſt, die $= 0$ ſeyn ſoll. Dieſes geſchiehet demnach, wenn dieſes Product $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ wird, welches eintrifft, wenn nur einer von den drey Factoren $= 0$, und alſo in drey Fällen, erſtlich, wenn $x - 1 = 0$, oder $x = 1$, zweytens, wenn $x - 2 = 0$, oder $x = 2$, und drittens, wenn $x - 3 = 0$ oder $x = 3$ iſt.

Man ſieht auch ſogleich, daß, wenn für x eine jegliche andere Zahl geſetzt wird, keiner von dieſen drey Factoren 0 werde, und alſo auch nicht das Product. Daher unſere Gleichung keine andern Wurzeln hat als dieſe drey.

§. 142.

Könnte man in einem jeden andern Falle die drey

Factores einer ſolchen Gleichung anzeigen, ſo hätte man ſogleich die drey Wurzeln derſelben. Wir wollen zu dieſem Ende drey ſolche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche $x-p$, $x-q$, $x-r$ ſeyn ſollen. Man ſuche demnach ihr Product, und da der erſte, mit dem zweyten multiplicirt, $xx-(p+q)x+pq$ giebt, ſo muß dieſes Product, noch mit $x-r$ multiplicirt, folgende Formel geben:

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr.$$

Soll nun dieſe Formel $=0$ ſeyn, ſo geſchieht dieſes in drey Fällen: erſtlich, wenn $x-p=0$ oder $x=p$, zweytens, wenn $x-q=0$ oder $x=q$, und drittens, wenn $x-r=0$ oder $x=r$ iſt.

§. 143.

Es ſey nun dieſe Gleichung folgendergeſtalt ausgedrückt: $x^3-ax^2+bx-c=0$, und wenn die Wurzeln derſelben I.) $x=p$, II.) $x=q$, III.) $x=r$ ſind, ſo muß erſtlich $a=p+q+r$, zweytens $b=pq+pr+qr$, und drittens $c=pqr$ ſeyn; woraus wir ſehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln, und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln enthält.

Dieſe letzte Eigenſchaft verſchafft uns ſogleich einen wichtigen Vortheil, nemlich ein bequemes Mittel, die Wurzeln einer Gleichung ausfindig zu machen. Denn da eine cubiſche Gleichung keine andern Rationalwurzeln haben kann, als ſolche, wodurch ſich das letzte Glied theilen läßt; weil daſſelbe ein Product aller drey Wurzeln iſt; ſo weiß man daher ſogleich, wenn man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anſtellen ſoll.

Dieſes zu erläutern, wollen wir folgende Gleichung betrachten: $x^3=x+6$, oder $x^3-x-6=0$. Da nun dieſelbe keine andern Rationalwurzeln haben kann, als ſolche, durch welche ſich das letzte Glied 6 theilen

läßt, ſo hat man nur nöthig, mit folgenden Zahlen 1, 2, 3, 6 die Probe anzuſtellen, welche man in der Gleichung für x ſetzt.

I.) Wenn $x = 1$, ſo iſt $x^3 - x - 6 = 1 - 1 - 6 = -6$
II.) Wenn $x = 2$, ſo iſt $x^3 - x - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$
III.) Wenn $x = 3$, ſo iſt $x^3 - x - 6 = 27 - 3 - 6 = 18$
IV.) Wenn $x = 6$, ſo iſt $x^3 - x - 6 = 216 - 6 - 6 = 204$

Hieraus ſehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ſeyn muß, aus welcher es nun leicht iſt, die beyden übrigen zu finden. Denn da $x = 2$ eine Wurzel iſt, ſo iſt $x - 2$ ein Factor der Gleichung; man darf alſo nur den andern Factor ſuchen, welches durch folgende Diviſion geſchiehet:

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3 - x - 6\ (xx + 2x + 3 \\
\quad\ \ \underline{x^3 - 2xx} \\
\qquad\quad 2xx - x - 6 \\
\qquad\quad \underline{2xx - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 3x - 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Weil ſich nun unſere Formel durch dieſes Product vorſtellen läßt $(x - 2)(xx + 2x + 3)$, ſo wird dieſelbe 0, nicht nur, wenn $x - 2 = 0$, ſondern auch, wenn $xx + 2x + 3 = 0$. Aus der letzten Gleichung aber bekommen wir $xx = -2x - 3$, und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unſerer Gleichung ſeyn müſſen, die, wie man ſieht, unmöglich oder imaginär ſind.

§. 144.

Dieſes findet aber nur Statt, wenn das erſte Glied der Gleichung x^3 keinen Coefficienten hat, oder, welches eben ſo viel ſagen will, mit 1, die übrigen Glieder aber mit ganzen Zahlen multiplicirt ſind. Kommen hingegen Brüche in der Gleichung vor, ſo hat man ein Mittel, die

Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyt iſt.

Denn es ſey z. B. dieſe Gleichung gegeben: $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$. Weil hier nun Viertel vorkommen, ſo ſetze man $x = \frac{y}{2}$; hierdurch bekömmt man $\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0$, welches mit 8 multiplicirt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$ giebt, wovon die Wurzeln, wie wir oben geſehen haben, folgende ſind: $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$. Daher iſt für unſere Gleichung I.) $x = \frac{1}{2}$, II.) $x = 1$, III.) $x = \frac{3}{2}$.

§. 145.

Wenn nun das erſte Glied eine Zahl zum Coefficienten hat, das letzte aber 1 iſt, wie z. B. in dieſer Gleichung: $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, ſo dividire man alle Glieder mit dem Coefficienten des erſten Gliedes, alſo die gegenwärtige Gleichung mit 6, wodurch man folgende neue Gleichung erhält: $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden kann, wenn man ſetzt $x = \frac{y}{6}$; denn da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und dieſe Gleichung mit 216 multiplicirt, wird $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$.

Hier würde es mühſam ſeyn, die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzuſtellen. Weil aber in unſerer erſtern Gleichung das letzte Glied 1 iſt, ſo ſetze man $x = \frac{1}{z}$, wodurch man folgende Gleichung erhält: $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$, aus welcher, wenn man mit z^3 multiplicirt, dieſe wird $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$, oder, wenn alle Glieder auf die andere Seite gebracht werden, $0 = z^3 - 6zz + 11z - 6$, deren Wurzeln fol-

ge de ſind: $z=1$, $z=2$, $z=3$; daher wir für unſere Gleichung erhalten $x=1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$.

§. 146.

Aus dem obigen erkennt man, daß, wenn alle Wurzeln poſitive Zahlen ſind, in der Gleichung die Zeichen + und — mit einander abwechſeln müſſen, ſo daß die Gleichung eine ſolche Geſtalt bekömmt: $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo drey Abwechſelungen vorkommen, nemlich eben ſo viel, als poſitive Wurzeln vorhanden ſind. Wären aber alle drey Wurzeln negativ geweſen, und man hätte dieſe drey Factoren mit einander multiplicirt $x+p$, $x+q$, $x+r$, ſo würden alle Glieder das Zeichen +, und die Gleichung dieſe Form bekommen haben: $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß, ſo oft die Zeichen abwechſeln, die Gleichung auch eben ſo viel poſitive Wurzeln, ſo oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieſelbe eben ſo viel negative Wurzeln habe; welche Anmerkung hier von großer Wichtigkeit iſt, damit man wiſſe, ob man die Theiler des letzten Gliedes, womit man die Probe anſtellen will, negativ oder poſitiv nehmen ſoll.

§. 147.

Um dieſes mit einem Beyſpiele zu erläutern, ſo wollen wir folgende Gleichung betrachten:

$x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, in welcher zwey Abwechſelungen der Zeichen, und nur eine Folge eben deſſelben Zeichens vorkömmt; woraus wir ſchließen, daß dieſe Gleichung zwey poſitive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler des letzten Gliedes 56 ſeyn, und alſo unter dieſen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$ ſich befinden müſſen.

Setzt man nun $x=2$, ſo wird $8+4-68+56=0$; woraus wir ſehen, daß $x=2$ eine poſitive Wurzel, und

alſo $x-2$ ein Theiler unſerer Gleichung ſey, wodurch die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wenn man nur die Gleichung durch $x-2$ dividiret, wie folgende Rechnung zeigt.

$$
\begin{array}{l}
x-2)\ x^3+xx-34x+56\ (xx+3x-28 \\
\quad\ \ \underline{x^3-2xx} \\
\qquad\quad 3xx-34x+56 \\
\qquad\quad \underline{3xx-\ \ 6x} \\
\qquad\qquad -28x+56 \\
\qquad\qquad \underline{-28x+56} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Man ſetze alſo dieſen Quotienten $xx+3x-28=0$, ſo wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche $x=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}$, d. i. $x=4$ und $x=-7$ ſeyn werden.

Hieraus erhellet, daß wirklich zwey poſitive, nemlich 2 und 4, aber nur eine negative Wurzel, nemlich -7 hier Statt finden. Dieſes wollen wir noch durch folgende Beyſpiele erläutern.

§. 148.

I. Aufgabe. Man ſuche zwey Zahlen, welche dieſe Eigenſchaft haben, daß, wenn man die kleinere von der größern abzieht, 12 übrig bleibt, wenn man aber ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, die Zahl 14560 herauskömmt.

Die kleinere Zahl ſey x, ſo iſt die größere $x+12$, und das Product der einen in die andre $xx+12x$. Dieſes mit ihrer Summe $2x+12$ multiplicirt, giebt $2x^3+36xx+144x=14560$, und wenn man durch 2 dividirt, erhält man $x^3+18xx+72x=7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß iſt, als daß die Probe mit allen ſeinen Theilern angeſtellet werden könnte, daſſelbe aber durch 8 ſich theilen läßt, ſo ſetze man $x=2y$, und verwandle die vorige Gleichung

in eine andere, wo kein x, ſondern lauter y vorkömmt. Von $2y$ iſt das Quadrat $4y^2$ und die Cubikzahl $8y^3$. Setzt man alſo anſtatt x das, was ihm gleich iſt, $2y$, und anſtatt x^2 das Quadrat $4y^2$, und anſtatt x^3 die Cubikzahl $8y^3$, ſo erhält man folgende Gleichung: $8y^3 + 72yy + 144y = 7280$, welche durch 8 dividirt, giebt $y^3 + 9yy + 18y = 910$, und nun darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 d. i. mit 1, 2, 5, 7, 10, 13 ꝛc. nach und nach die Probe machen. Die erſten 1, 2, 5, ſind offenbar zu klein; nimmt man aber $y = 7$, ſo bekömmt man $343 + 441 + 126 = 910$; alſo iſt eine Wurzel $y = 7$, folglich $x = 14$. Will man die beyden übrigen Wurzeln von y wiſſen, ſo dividire man $y^3 + 9yy + 18y - 910$ durch $y - 7$ folgendergeſtalt:

$$\begin{array}{l} y-7)\,y^3+9yy+18y-910\,(yy+16y+130 \\ \quad\; \underline{y^3-7yy} \\ \qquad\quad 16yy+18y-910 \\ \qquad\quad \underline{16yy-112y} \\ \qquad\qquad\quad 130y-910 \\ \qquad\qquad\quad \underline{130y-910} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Setzt man nun dieſen Quotienten $yy + 16y + 130 = 0$, ſo bekömmt man $yy = -16y - 130$, und daher $y = -8 \pm \sqrt{-66}$; woraus man ſieht, daß die beyden andern Wurzeln unmöglich ſind.

Die beyden geſuchten Zahlen ſind alſo 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt die Zahl 14560 giebt.

§. 149.

II. Aufgabe. Man ſuche zwey Zahlen, die um 18 von einander unterſchieden ſind, und noch dieſe Eigenſchaft haben, daß, wenn man die Differenz ihrer Cubikzahlen mit der Summe der Zahlen multiplicirt, 275184 herauskomme.

Die kleinere Zahl ſey x, ſo iſt die größere $x + 18$,

der Cubus der kleinern aber x^3, und der Cubus der grö⸗ßeren $= x^3 + 54xx + 972x + 5832$, alſo die Differenz derſelben $54xx + 972x + 5832 = 54(xx + 18x + 108)$, welche mit der Summe der Zahlen $2x + 18 = 2(x + 9)$ multiplicirt werden ſoll. Das Product iſt aber $108(x^3 + 27xx + 270x + 972) = 275184$. Man divi⸗dire durch 108, ſo kömmt $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$ oder $x^3 + 27xx + 270x = 1576$ heraus. Die Theiler der Zahl 1576 ſind 1, 3, 4, 8 ꝛc., wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x geſetzt dieſer Gleichung ein Genüge leiſtet. Wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, ſo müßte man die Gleichung durch $x - 4$ theilen, welches auf fol⸗gende Art geſchieht:

$$
\begin{array}{l}
x-4)\; x^3 + 27xx + 270x - 1576 \;(xx + 31x + 394 \\
\quad\; \underline{x^3 - 4xx} \\
\qquad\quad 31xx + 270x \\
\qquad\quad \underline{31xx - 124x} \\
\qquad\qquad\quad 394x - 1576 \\
\qquad\qquad\quad \underline{394x - 1576} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Aus dem Quotienten erhält man daher $xx = -31x - 394$, und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$, welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich ſind. Die ge⸗ſuchten Zahlen ſind alſo 4 und 22.

§. 150.

III. Aufgabe. Suche zwey Zahlen, die zur Diffe⸗renz 720 und übrigens noch dieſe Eigenſchaft haben, daß, wenn ich die Quadratwurzel der größern Zahl mit der klei⸗nern Zahl multiplicire, 20736 herauskomme.

Es ſey die kleinere Zahl $= x$, ſo iſt die größere $x + 720$, und $x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 . 8 . 4 . 81$. Nun nehme man ſowohl von $x\sqrt{(x + 720)}$, als auch von 20736 die Quadrate, ſo wird

$xx(x + 720) = x^3 + 720xx = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$.

Man ſetze ferner $x = 8y$,

ſo wird $8^3 y^3 + 720 . 8^2 y^2 = 8^2 . 8^2 . 4^2 . 81^2$

Durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90 y^2 = 8 . 4^2 . 81^2$
Es ſey nun $y = 2 z$, und alſo $y^2 = 4 z^2$ und $y^3 = 8 z^3$,
ſo wird $8 z^3 + 4 . 90 zz = 8 . 4^2 . 81^2$
Durch 8 dividirt wird $z^3 + 45 zz = 4^2 . 81^2$
Man ſetze ferner $z = 9 u$
ſo wird $9^3 u^3 + 45 . 9^2 uu = 4^2 . 9^4$.
Durch 9^3 dividirt, wird $u^3 + 5 uu = 4^2 . 9$ oder $uu (u + 5) = 16 . 9 = 144$. Hier ſieht man offenbar, daß $u = 4$. Denn da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$. Weil nun $u = 4$, ſo iſt $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war; die größere aber 1296, wovon die Quadratwurzel 36, welche mit der kleinern Zahl 576 multiplicirt 20736 giebt.

§. 151.

Dieſe Aufgabe kann noch bequemer folgendergeſtalt aufgelöſet werden. Weil die größere Zahl ein Quadrat ſeyn muß, indem ſonſt ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte; ſo ſey die größere Zahl xx, die kleinere alſo $xx - 720$, welche mit der Quadratwurzel jener, d. i. mit x multiplicirt, $x^3 - 720 x = 20736 = 64 . 27 . 12$ giebt. Man ſetze $x = 4 y$,
ſo iſt $64 y^3 - 720 . 4 y = 64 . 27 . 12$.
Durch 64 dividirt wird $y^3 - 45 y = 27 . 12$.
Man ſetze ferner $y = 3 z$,
ſo iſt $27 z^3 - 135 z = 27 . 12$
Durch 27 dividirt wird $z^3 - 5 z = 12$ oder $z^3 - 5 z - 12 = 0$. Die Theiler von 12 ſind 1, 2, 3, 4, 6, 12. Von dieſen ſind 1 und 2 zu klein; ſetzt man aber $z = 3$, ſo wird $27 - 15 - 12 = 0$. Daher iſt $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$. Die größere Zahl iſt alſo, wie oben, $xx = 1296$, und die kleinere $xx - 720 = 576$.

§. 152.

IV. Aufgabe. Etliche Kaufleute legen zuſammen und handeln gemeinſchaftlich. Jeder von ihnen giebt zehn-

mal ſo viel Gulden, als der Perſonen ſind, und mit dieſer Summe gewinnen ſie 6 Procent mehr als ihrer ſind. Nun findet ſichs, daß der Gewinnſt zuſammen 392 Fl. beträgt; wie viel ſind der Kaufleute geweſen?

Man ſetze, es ſeyen x Kaufleute geweſen, ſo legt einer 10x Fl., alle aber legen 10xx Fl. ein, und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer ſind; alſo mit 100 Fl. gewinnen ſie x + 6 Fl. und mit dem ganzen Kapital gewinnen ſie zuſammen $\frac{x^3 + 6xx}{10} = 392$.
Multiplicirt man mit 10, ſo erhält man
$x^3 + 6xx = 3920$.
Setzt man nun $x = 2y$ und alſo $x^2 = 4y^2$ und $x^3 = 8y^3$, ſo wird $8y^3 + 24yy = 3920$.
Dieſe Gleichung, durch 8 dividirt, giebt $y^3 + 3yy = 490$.
Die Theiler des letzten Glieds ſind 1, 2, 5, 7, 10, ꝛc., wovon die erſten drey 1, 2 und 5 zu klein ſind.
Setzt man aber $y = 7$, ſo wird $343 + 147 = 490$.
Folglich iſt $y = 7$ und $x = 14$.

Es ſind alſo 14 Kaufleute geweſen, und ein jeder hat 140 Fl. eingelegt.

§. 153.

V. Aufgabe. Einige Kaufleute haben zuſammen ein Kapital von 8240 Rthl. Hierzu legt ein jeder noch 40 mal ſo viel Rthl., als der Kaufleute ſind. Mit dieſer ganzen Summe gewinnen ſie ſo viel Procente als der Perſonen ſind. Hierauf theilen ſie den Gewinnſt, und ein jeder nimmt zehnmal ſo viel Rthlr., als der Perſonen ſind; es bleiben aber dennoch 224 Rthl. übrig. Wie viel Perſonen haben dieſe Geſellſchaft ausgemacht?

Die Zahl der Kaufleute ſey = x, ſo legt ein jeder noch 40x Rthl. zu dem Kapital von 8240 Rthl. Alle zuſammen legen alſo dazu noch 40xx Rthl. und folglich war die ganze Summe 40xx + 8240 Rthl.

Mit dieſer gewinnen ſie x Procent; daher wird der ganze Gewinnſt ſeyn:

$$\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4x^3}{10} + \frac{824x}{10} = \frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5}.$$

Hiervon nimmt nun ein jeder 10 x Rthl., folglich alle zuſammen 10 xx Rthl., und da bleiben noch 224 Rthl. übrig. Hieraus erhellet, daß der Gewinnſt geweſen ſey: 10 xx + 224, woraus folgende Gleichung entſteht:

$$\frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5} = 10xx + 224,$$

Dieſe mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt, wird

$$x^3 + 206x = 25xx + 560 \text{ oder } x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0.$$

Doch um zu probiren, wird die erſte Form bequemer ſeyn. Da nun die Theiler des letzten Gliedes ſind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, ꝛc., welche poſitiv genommen werden müſſen, weil in der letzten Gleichung drey Abwechſelungen von Zeichen vorkommen, woraus man ſicher ſchließen kann, daß alle drey Wurzeln poſitiv ſind (§. 146.). Probirt man nun mit x = 1 oder x = 2, ſo iſt offenbar, daß der erſte Theil viel kleiner werde, als der zweyte. Wir wollen alſo mit den folgenden probiren:

Wenn x = 4, ſo wird 64 + 824 = 400 + 560
Trifft alſo nicht zu.

Iſt x = 5, ſo wird 125 + 1030 = 625 + 560
Trifft ebenfalls nicht zu.

Wenn aber x = 7, ſo wird 343 + 1442 = 1225 + 560
Trifft genau zu.

Daher iſt x = 7 eine Wurzel unſerer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, ſo theile man die letzte Form durch x − 7 auf folgende Art:

$$x - 7)\, x^3 - 25xx + 206x - 560\, (xx - 18x + 80$$
$$\underline{x^3 - 7xx}$$
$$-18xx + 206x$$
$$\underline{-18xx + 126x}$$
$$80x - 560$$
$$\underline{80x - 560}$$
$$0$$

Man ſetze alſo den Quotienten $= 0$, ſo hat man $xx - 18x + 80 = 0$ oder $xx = 18x - 80$; daher $x = 9 \pm 1$. Folglich ſind die beyden andern Wurzeln $x = 8$ und $x = 10$.

Es finden alſo dreyerley Auflöſungen dieſer Aufgabe Statt. Nach der erſten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieſelbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beygefügte Probe zeigt.

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute . .	7	8	10
Ein jeder legt ein 40x . .	280	320	400
Alle zuſammen legen alſo ein 40xx	1960	2560	4000
Das alte Kapital war . .	8240	8240	8240
Das ganze Kapital iſt 40xx + 8240	10200	10800	12240
Mit demſelben wird gewonnen ſo viel Procent als der Perſonen ſind	714	864	1224
Hiervon nimmt ein jeder weg 10x	70	80	100
Folglich alle zuſammen 10xx	490	640	1000
Bleibt alſo noch übrig . .	224	224	224

Zwölftes Kapitel.

Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei.

§. 154.

Wenn eine cubiſche Gleichung auf ganze Zahlen gebracht wird, und kein Theiler des letzten Gliedes eine Wurzel der Gleichung iſt, ſo iſt dieſes ein ſicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in ganzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine Statt finde, welches alſo gezeiget wird.

Es ſey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo a, b und c ganze Zahlen ſind. Denn wollte man z. B. ſetzen $x = \frac{3}{2}$, ſo kömmt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$. Hier hat nun das erſte Glied allein 8 zum Nenner; die übrigen ſind nur durch 4 und 2 getheilt oder ganze Zahlen, welche alſo mit dem erſten nicht können 0 werden, und dieſes gilt auch von allen andern Brüchen.

Da nun in dieſen Fällen die Wurzel der Gleichung weder ganze Zahlen, noch Brüche ſeyn können, ſo ſind dieſelben irrational, und auch ſogar öfters imaginär. Wie nun dieſelben ausgedrückt werden ſollen, und was darinn für Wurzelzeichen vorkommen, iſt eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung gemeiniglich dem Cardano oder vielmehr dem Scipioni Ferreo zugeſchrieben wird, welche deswegen verdient, hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

§. 155.

Man muß zu dieſem Ende die Natur eines Cubi, deſſen Wurzel aus zwey Theilen beſteht, genauer in Erwägung ziehen.

Es ſey demnach die Wurzel $a + b$, ſo iſt der Cubus davon $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ (I. Th. §. 259.),

welcher erſtlich aus dem Cubo eines jeden Theils beſteht, und außer demſelben noch die zwey Mittelglieder enthält, $3aab + 3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben; der andere Factor aber iſt $a + b$. Denn $3ab$ mit $a + b$ multiplicirt giebt $3aab + 3abb$. Dieſe zwey Glieder enthalten alſo das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

Man ſetze nun, es ſey $x = a + b$, und nehme beyderſeits die Cubikzahl, ſo wird $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Da nun $a + b = x$ iſt, ſo hat man dieſe cubiſche Gleichung: $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$ oder $x^3 = 3abx + a^3 + b^3$, von welcher wir wiſſen, daß eine Wurzel $x = a + b$ ſeyn muß. So oft demnach eine ſolche Gleichung vorkömmt, ſo können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es ſey z. B. $a = 2$ und $b = 3$, ſo bekömmt man dieſe Gleichung $x^3 = 18x + 35$, von welcher wir gewiß wiſſen, daß $x = 5$ eine Wurzel iſt.

§. 156.

Man ſetze nun ferner $a^3 = p$ und $b^3 = q$, ſo wird $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$; folglich $ab = \sqrt[3]{pq}$. Wenn daher dieſe cubiſche Gleichung vorkömmt:

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{pq} + p + q,$$

ſo iſt eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergeſtalt beſtimmen, daß ſowohl $3\sqrt[3]{pq}$, als auch $p + q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man in Stand geſetzt wird, eine jede cubiſche Gleichung von dieſer Art aufzulöſen.

§. 157.

Es ſey daher dieſe allgemeine cubiſche Gleichung gegeben: $x^3 = fx + g$. Hier muß alſo f mit $3\sqrt[3]{pq}$,

und g mit $p+q$ verglichen werden; oder man muß p und q ſo beſtimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p+q$ der Zahl g gleich werde, und alsdenn wiſſen wir, daß eine Wurzel unſerer Gleichung $x=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ ſeyn werde.

§. 158.

Man hat alſo dieſe zwey Gleichungen aufzulöſen: I.) $3\sqrt[3]{pq}=f$ und II.) $p+q=g$. Aus der erſten erhält man $\sqrt[3]{pq}=\frac{1}{3}f$ und $pq=\frac{1}{27}f^3$, und $4pq=\frac{4}{27}f^3$. Die andere Gleichung quadrire man, ſo kömmt $pp+2pq+qq=gg$ heraus. Hiervon ſubtrahire man $4pq=\frac{4}{27}f^3$, ſo wird $pp-2pq+qq=gg-\frac{4}{27}f^3$, woraus die Quadratwurzel $p-q=\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ iſt.

Da nun $p+q=g$, ſo wird, wenn man $p-q$ und $p+q$ addirt, $2p=g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ und $2q=g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ *). Daher erhalten wir $p=\frac{g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}$ und $q=\frac{g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}$.

§. 159.

Wenn alſo eine ſolche cubiſche Gleichung vorkömmt, wie $x^3+fx=g$, die Zahlen f und g mögen beſchaffen ſeyn wie ſie wollen, ſo wird eine Wurzel derſelben allezeit ſeyn

$$x=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}.$$

Hieraus erhellet, daß dieſe Irrationalität nicht nur das Quadratwurzelzeichen, ſondern auch das cubiſche in ſich faſſe; und dieſe Formel iſt dasjenige, was man die Regel des Cardani zu nennen pflegt.

*) Denn aus der Gleichung $p-q=\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}$ folgt dieſe: $-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}=q-p$, und wenn man hierzu $g=p+q$ addirt, ſo erhält man $g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}=2q$.

§. 160.

Wir wollen dieſelbe mit einigen Beyſpielen erläutern.

Es ſey $x^3 = 6x + 9$, ſo iſt hier $f = 6$ und $g = 9$, alſo $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27} f^3 = 32$; daher $gg - \frac{4}{27} f^3 = 49$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = 7$. Folglich wird von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel ſeyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, d. i. $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Alſo iſt $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

§. 161.

Es ſey ferner dieſe Gleichung $x^3 = 3x + 2$ gegeben, ſo wird $f = 3$ und $g = 2$, alſo $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27} f^3 = 4$, folglich die Quadratwurzel aus $gg - \frac{4}{27} f^3 = 0$; daher eine Wurzel ſeyn wird $x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2$.

§. 162.

Allein wenn auch eine ſolche Gleichung eine rationale Wurzel hat, ſo geſchieht es doch öfters, daß dieſelbe durch dieſe Regel nicht gefunden wird, ob ſie gleich darinnen ſteckt.

Es ſey dieſe Gleichung $x^3 = 6x + 40$ gegeben, wo $x = 4$ eine Wurzel iſt. Hier iſt nun $f = 6$ und $g = 40$, ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27} f^3 = 32$; alſo $gg - \frac{4}{27} f^3 = 1568$ und $\sqrt{(gg - \frac{4}{27} f^3)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$. Folglich iſt eine Wurzel

$$x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}} \text{ oder}$$

$$x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})},$$

welche Formel wirklich 4 iſt, ohngeachtet ſolches nicht ſogleich daraus erhellet.

Denn der Cubus von $2 + \sqrt{2}$ iſt $20 + 14\sqrt{2}$,

und folglich iſt umgekehrt $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$, und eben ſo auch $\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$. Hieraus wird unſere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

§. 163.

Manche werden vielleicht gegen dieſe Regel einwenden, daß dieſelbe ſich nicht auf alle, ſondern nur auf ſolche cubiſche Gleichungen erſtrecke, worinnen das Quadrat von x nicht vorkömmt, oder worinnen das zweyte Glied fehlt. Es iſt aber zu merken, daß eine jede vollſtändige Gleichung ſich allezeit in eine andere verwandeln läßt, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich dieſe Regel angewandt werden kann. Um dieſes zu zeigen, ſo ſey folgende vollſtändige cubiſche Gleichung gegeben: $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Man nehme hier den dritten Theil des Coefficienten, nemlich der Zahl 6 im zweyten Gliede, mit dem dabey ſtehenden Zeichen, und ſetze $x - 2 = y$; ſo wird $x = y + 2$, und, wenn man überall y anſtatt x ſetzt, die vorige vollſtändige Gleichung in eine andere verwandelt werden, worinnen kein Quadrat von der unbekannten Größe vorkömmt, wie folgende Rechnung zeigt.

Da $x = y + 2$, und alſo $xx = yy + 4y + 4$

ſo iſt	$x^3 =$	$y^3 + 6yy + 12y + 8$
	$-6xx =$	$-6yy - 24y - 24$
	$+11x =$	$+11y + 22$
	$-6 =$	-6

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = y^3 - y.$$

Daher erhalten wir dieſe Gleichung $y^3 - y = 0$, deren Auflöſung ſogleich in die Augen fällt. Denn nach den Factoren hat man

$$y(yy - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0.$$

Setzt man nun einen jeden Factor $=0$, ſo bekömmt man:

$$\text{I.}\begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{II.}\begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{III.}\begin{cases} y=1 \\ x=3 \end{cases}$$

welches die drey ſchon oben gefundenen Wurzeln ſind.

§. 164.

Es ſey nun dieſe allgemeine cubiſche Gleichung gegeben: $x^3+axx+bx+c=0$, aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden ſoll.

Zu dieſem Ende ſetze man zu x den dritten Theil des Coefficienten des zweyten Gliedes, welcher hier 1 iſt, mit ſeinem Zeichen, und ſchreibe dafür einen neuen Buchſtaben z. B. y. Dieſer Regel zufolge werden wir haben $x+\frac{1}{3}a=y$, und alſo $x=y-\frac{1}{3}a$, woraus folgende Rechnung entſteht:

$x=y-\frac{1}{3}a$, und daher $xx=yy-\frac{2}{3}ay+\frac{1}{9}aa$.

$$\begin{aligned} \text{Alſo } x^3 &= y^3 - ayy + \tfrac{1}{3}aay - \tfrac{1}{27}a^3 \\ axx &= \quad\; + ayy - \tfrac{2}{3}aay + \tfrac{1}{9}a^3 \\ bx &= \qquad\qquad\; + by - \tfrac{1}{3}ab \\ c &= \qquad\qquad\qquad\quad + c \end{aligned}$$

Folglich $y^3-(\frac{1}{3}aa-b)y+\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c=0$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

§. 165.

Nun kann man auch des Cardani Regel leicht auf dieſen Fall anwenden. Denn da wir oben die Gleichung hatten $x^3=fx+g$ oder $x^3-fx-g=0$, ſo wird für unſern Fall $f=\frac{1}{3}aa-b$, und $g=-\frac{2}{27}a^3+\frac{1}{3}ab+c$. Aus dieſen für die Buchſtaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir, wie oben:

$$y=\sqrt[3]{\frac{g+\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{g-\sqrt{(gg-\frac{4}{27}f^3)}}{2}}$$

Und da ſolchergeſtalt y gefunden worden iſt, ſo werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x=y-\frac{1}{3}a$.

§. 166.

Mit Hülfe dieſer Veränderung ſind wir nun im Stande, die Wurzeln von allen cubiſchen Gleichungen zu finden, welches wir durch ein Beyſpiel zeigen wollen. Es ſey alſo folgende Gleichung gegeben:

$$x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0.$$

Um hier das zweyte Glied wegzubringen, ſo ſetze man $x - 2 = y$. Es wird alſo ſeyn:

$$x = y + 2 \text{ und } xx = yy + 4y + 4.$$

$$\begin{array}{rrl} \text{Ferner} & x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ & -6xx = & \quad\; - 6yy - 24y - 24 \\ & +13x = & \qquad\qquad + 13y + 26 \\ & -12 = & \qquad\qquad\qquad\quad - 12 \\ \hline \end{array}$$

Folglich $x^3 - 6xx + 13x - 12 = y^3 + y - 2 = 0$ oder $y^3 = -y + 2$, welches mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen, giebt $f = -1$ und $g = 2$; folglich $gg = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$.

Alſo $gg - \frac{4}{27}f = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; daher erhalten wir $\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ *), woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)}, \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})};$$

und hernach bekömmt man $x = y + 2$.

---

*) Nemlich weil $\frac{112}{27} = \frac{336}{81}$, ſo iſt $\sqrt{\frac{112}{27}} = \sqrt{\frac{336}{81}} = \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{21}}{\sqrt{81}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$.

§. 167.

Bey Auflöſung dieſer Aufgabe ſind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen; gleichwohl muß man daraus nicht ſchließen, daß die Wurzel ſchlechterdings irrational ſey, indem es ſich glücklicherweiſe fügen könnte, daß die Binomien $27 \pm 6\sqrt{21}$ wirkliche Cubi wären. Dieſes trifft auch hier zu. Denn da der Cubus

von $\frac{3+\sqrt{21}}{2} = \frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$,

ſo iſt die Cubikwurzel aus $27 + 6\sqrt{21} = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

und die Cubikwurzel aus $27 - 6\sqrt{21} = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$.

Hieraus alſo wird der obige Werth für y ſeyn

$$y = \tfrac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Da nun $y = 1$, ſo bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung iſt. Wollte man die beyden andern Wurzeln auch finden, ſo müßte man die Gleichung durch $x - 3$ folgendergeſtalt dividiren:

$$\begin{array}{l}
x-3)\,x^3 - 6xx + 13x - 12\,(xx - 3x + 4 \\
\quad\;\; \underline{x^3 - 3xx} \\
\qquad\quad -3xx + 13x \\
\qquad\quad \underline{-3xx + \;\,9x} \\
\qquad\qquad\quad + 4x - 12 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+ 4x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Nimmt man nun an, daß dieſer Quotient $xx - 3x + 4 = 0$, ſo wird $xx = 3x - 4$, und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - \frac{16}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, d. i. $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$.

Dieſes wären alſo die beyden andern Wurzeln, aber beyde imaginär.

§. 168.

Es war hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien wirklich die Cubikwurzel ausziehen konnte, welches ſich auch nur in den Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rationalwurzel hat, die daher weit leichter nach den Regeln des vorigen Kapitels hätte gefunden werden können. Wenn aber keine Rationalwurzel Statt findet, ſo kann dieſelbe auch nicht anders, als auf dieſe Art nach des Cardani Regel *) angegeben werden, ſo daß alsdenn keine weitere Abkürzung Statt findet, wie z. B. in dieſer Gleichung geſchiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Daher gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$, welches ſich nicht anders ausdrücken läßt.

---

*) Die in dieſem Kapitel vom Hrn. Euler erklärte ſogenannte Cardaniſche Regel iſt eigentlich zuerſt von dem Scipio Ferreus, aus Bononien, erfunden worden. Weil aber dieſer ein Geheimniß aus ſeiner Erfindung machte, ſo wurde Nicolaus Tartalea, ebenfalls ein italieniſcher Gelehrter, dadurch veranlaßt, ſelbſt über dieſe Materie nachzudenken. Er brachte auch dieſe Regel glücklich heraus, und theilte ſie dem Cardan mit, jedoch ohne Beweis, welchen Cardan hernach in ſeiner Algebra lieferte, die unter dem Titel: Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus, und mit ſeinem Opere novo de proportionibus numerorum, motuum etc. zu Baſel 1570 herausgekommen iſt.

Dreyzehntes Kapitel.

Von der Auflöſung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratiſche Gleichungen genannt werden.

§. 169.

Wenn die höchſte Potestät der Zahl x zum vierten Grade hinauf ſteiget, ſo werden ſolche Gleichungen vom vierten Grade auch biquadratiſche genannt, wovon alſo die allgemeine Form ſeyn wird: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$. Von dieſen müſſen wir nun vor allen Dingen die ſogenannten reinen biquadratiſchen Gleichungen betrachten, deren Form $x^4 = f$ iſt, woraus man ſogleich die Wurzel findet, wenn man beyderſeits die Wurzel vom vierten Grade auszieht, da man denn erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

§. 170.

Weil x^4 das Quadrat von xx iſt, ſo wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wenn man erſtlich nur die Quadratwurzel ausziehet, da man denn $xx = \sqrt{f}$ bekömmt; hernach zieht man nochmals die Quadratwurzel aus, ſo bekömmt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, ſo daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders iſt, als die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von f.

Hat man z. B. dieſe Gleichung $x^4 = 2401$, ſo findet man daraus durch Ausziehung der Quadratwurzel erſtlich $xx = 49$, und wenn man hiervon wieder die Quadratwurzel nimmt, $x = 7$.

§. 171.

Allein ſolchergeſtalt findet man nur eine Wurzel. Da es aber bey den cubiſchen Gleichungen immer drey Werthe für x giebt, ſo läßt ſich nicht ohne Grund vermuthen, daß eine biquadratiſche Gleichung vier Wur-

zeln haben werde, welche auch auf dieſe Art herausgebracht werden können. Denn da aus dem letzten Beyſpiele nicht nur folget, daß $xx = 49$, ſondern auch daß $xx = -49$, ſo erhalten wir aus jenem dieſe zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$, aus dieſem aber bekommen wir ebenfalls $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$, und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$, welches die vier biquadratiſchen Wurzeln aus 2401 ſind. Und ſo verhält es ſich auch mit allen andern Zahlen.

§. 172.

Auf dieſe reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, worinn nicht nur das zweyte, ſondern auch das vierte Glied fehlt, oder welche dieſe Form haben: $x^4 + fxx + g = 0$, und die nach der Regel der quadratiſchen Gleichungen aufgelöſt werden können. Denn ſetzt man $xx = y$, ſo hat man $yy + fy + g = 0$, oder $yy = -fy - g$, woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 - g)} = \frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}$. Da nun $xx = y$, ſo wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(f^2 - 4g)}}{2}}$ wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

§. 173.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, ſo kann man dieſelbe immer als ein Product aus vier Factoren anſehen. Denn multiplicirt man dieſe vier Factoren mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$, ſo findet man folgendes Product: $x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx - (pqr+pqs+prs+qrs)x + pqrs$, welche Formel nicht anders 0 werden kann, als wenn einer von obigen vier Factoren $= 0$ iſt. Dieſes kann demnach auf viererley Art geſchehen: I.) wenn $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$, IV.) $x = s$, welches alſo die vier Wurzeln dieſer Gleichung ſind.

§. 174.

Betrachten wir dieſe Form etwas genauer, ſo finden wir, daß in dem zweyten Gliede die Summe aller vier Wurzeln vorkömmt, welche mit $-x^3$ multiplicirt iſt; im dritten Gliede iſt der Coefficient die Summe der Producte aus immer zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, und der zweyte Factor iſt xx; im vierten Gliede ſieht man die Summe der Producte aus immer drey Wurzeln, welche mit $-x$ multiplicirt iſt, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier mit einander multiplicirten Wurzeln.

§. 175.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, ſo kann eine ſolche biquadratiſche Gleichung keine andere Rationalwurzeln haben, als welche zugleich Theiler des letzten Gliedes ſind; daher man aus dieſem Grunde alle Rationalwurzeln, wenn dergleichen vorhanden ſind, leicht finden kann, wenn man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Gliedes ſetzt, und zuſieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geſchehe. Hat man aber auch nur eine ſolche Wurzel gefunden, z. B. $x = p$, ſo darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren, und den Quotienten $= 0$ ſetzen, wodurch man eine cubiſche Gleichung erhalten wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelöſet werden kann.

§. 176.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus ganzen Zahlen beſtehen, und daß das erſte keinen Coefficienten habe, oder, welches eben ſo viel ſagen will, nur mit 1 multiplicirt ſey. Kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, ſo müſſen dieſelben vorher weggeſchafft werden, welches jederzeit geſchehen kann, wenn man für x ſchreibt y getheilt durch eine Zahl, wel-

che die Nenner der Brüche in ſich ſchließt. Z. B. wenn dieſe Gleichung vorkäme: $x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}xx + \frac{3}{4}x + \frac{1}{18} = 0$, ſo ſetze man, weil in den Nennern 2 und 3 nebſt ihren Poteſtäten vorkommen, $x = \frac{y}{6}$; denn nun wird, wenn man überall anſtatt x den ihm gleichgeltenden Bruch $\frac{y}{6}$, anſtatt x^4 den Bruch $\frac{y^4}{6^4}$ u. ſ. f. ſetzt,

$$\frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

welches, mit 6^4 multiplicirt, giebt

$$y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0.$$

Wollte man nun ſuchen, ob dieſe Gleichung rationale Wurzeln habe, ſo müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 ſchreiben, um zu ſehen, in welchen Fällen die Formel wirklich 0 werde.

§. 177.

Da aber die Wurzeln ſowohl negativ als poſitiv ſeyn können, ſo müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anſtellen, die erſte, da derſelbe poſitiv, die andere, da derſelbe negativ genommen würde. Man hat aber auch hier wiederum zu bemerken, daß, ſo oft die zwey Zeichen + und — mit einander abwechſeln, die Gleichung eben ſo viel poſitive Wurzeln habe; ſo oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben ſo viel negative Wurzeln vorhanden ſeyn müſſen. Da nun in unſrer Gleichung vier Abwechſelungen vorkommen, und keine Folge, ſo ſind alle Wurzeln poſitiv, und alſo hat man hier nicht nöthig, einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.

§. 178.

Es ſey z. B. dieſe biquadratiſche Gleichung gegeben:

$$x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0.$$

Hier kommen nun zwey Abwechſelungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor; woraus man ſicher ſchließen kann, daß dieſe Gleichung zwey poſitive und auch zwey negative Wurzeln haben werde, welche alle Theiler der Zahl 12 ſeyn müſſen. Da nun dieſe Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 12 ſind, ſo probire man erſtlich mit $x = +1$. Weil auch wirklich, wenn man 1 anſtatt x in der Gleichung ſetzt, 0 herauskömmt, ſo iſt eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$, ſo erhält man folgendes: $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$, und daher giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man ſetze ferner $x = 2$, ſo wird unſere Formel wieder $= 0$, und alſo $x = 2$ eine Wurzel; hingegen $x = -2$ geht nicht an. Setzt man weiter $x = 3$, ſo wird $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$; geht alſo auch nicht an. Man ſetze aber $x = -3$, ſo kömmt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$ heraus; folglich iſt $x - 3$ eine Wurzel. Eben ſo findet man auch, daß $x = -4$ eine Wurzel ſeyn werde, ſo daß alle vier Wurzeln rational, und zwar zwey poſitiv, und zwey negativ ſind, nemlich: I.) $x = 1$, II.) $x = 2$, III.) $x = -3$, IV.) $x = -4$.

§. 179.

Wenn aber keine Wurzel rational iſt, ſo läßt ſich auch durch dieſen Weg keine finden; daher man auf Mittel bedacht geweſen iſt, um in dieſen Fällen die Irrationalwurzeln ausdrücken zu können. Man iſt auch ſo glücklich geweſen, zwey verſchiedene Wege zu entdecken, um zur Erkenntniß ſolcher Wurzeln zu gelangen, die biquadratiſche Gleichung mag auch beſchaffen ſeyn, wie ſie wolle.

Ehe wir aber dieſe allgemeinen Wege erörtern, ſo wird es dienlich ſeyn, einige beſondere Fälle aufzulöſen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

§. 180.

Wir wollen ſetzen, die Gleichung ſey ſo beſchaffen, daß die Coefficienten rückwärts eben ſo fortgehen als vorwärts, wie in dieſer Gleichung geſchiehet: $x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0$, welche noch etwas allgemeiner alſo vorgeſtellt werden kann:

$$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0.$$

Eine ſolche Form kann allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratiſche Formeln ſind, angeſehen werden, die ſich leicht beſtimmen laſſen. Denn man ſetze für dieſe Gleichung folgendes Product: $(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0$, wo p und q geſucht werden müſſen, daß die obige Gleichung heraus komme. Es wird aber durch die wirkliche Multiplication gefunden:

$$x^4 + (p+q)ax^3 + (pq+2)aaxx + (p+q)a^3x + a^4 = 0.$$

Damit alſo dieſe Gleichung mit der vorgegebenen einerley ſey, ſo werden folgende zwey Stücke erfordert: I.) daß $p + q = m$, und II.) daß $pq + 2 = n$, folglich $pq = n - 2$.

Die erſtere quadrirt giebt $pp + 2pq + qq = mm$, und wenn man hiervon die andere viermal genommen, nemlich $4pq = 4n - 8$, ſubtrahirt, ſo bleibt übrig $pp - 2pq + qq = mm - 4n + 8$, wovon die Quadratwurzel iſt: $p - q = \sqrt{(mm - 4n + 8)}$. Da nun $p + q = m$, ſo erhalten wir durch die Addition $2p = m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ oder $p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$ durch die Subtraction aber bekommen wir:

$2q = m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}$ oder $q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n + 8)}}{2}$.

Hat man nun p und q gefunden, ſo darf man nur einen jeden der Factoren $= 0$ ſetzen, um daraus die Werthe von x zu finden. Der erſte giebt

$$xx + pax + aa = 0 \text{ oder } xx = -pax - aa;$$

woraus man findet $x = -\frac{pa}{2} \pm \surd\left(\frac{ppaa}{4} - aa\right)$

oder $x = -\frac{pa}{2} \pm a\surd\left(\frac{pp}{4} - 1\right)$

oder $x = -\frac{pa}{2} \pm \frac{1}{2}a\surd(pp - 4)$.

Der andere Factor aber giebt $xx + qax + aa = 0$ oder $xx = -qax - aa$, woraus man findet $x = -\frac{qa}{2} \pm \frac{1}{2}a\surd(qq - 4)$, und alſo hat man alle vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

§. 181.

Um dieſes zu erläutern, ſo ſey folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 4x^3 - 3xx - 4x + 1 = 0$. Hier iſt nun $a = 1$, $m = -4$, $n = -3$; daher $mm - 4n + 8 = 36$, und die Quadratwurzel daraus $= 6$ ſeyn wird. Wir bekommen alſo $p = \frac{-4+6}{2} = 1$ und $q = \frac{-4-6}{2} = -5$ woraus die vier Wurzeln ſeyn werden:

I.) und II.) $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\surd -3 = -\frac{1 \pm \surd -3}{2}$; ferner die III.) und IV.) $x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\surd 21 = \frac{5 \pm \surd 21}{2}$.

Die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung ſind alſo folgende:

I.) $x = \frac{-1 + \surd -3}{2}$, II.) $x = \frac{-1 - \surd -3}{2}$,

III.) $x = \frac{5 + \surd 21}{2}$, IV.) $x = \frac{5 - \surd 21}{2}$,

wovon die zwey erſten imaginär oder unmöglich, die beyden andern aber möglich ſind, weil man $\surd 21$ ſo genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimalbrüche ausdrückt. Denn weil 21 ſo viel als 21,00000000 iſt, ſo ziehe man daraus die Quadratwurzel. Da nun $\surd 21,00000000 = 4,5825$, ſo iſt

die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4,7912$, und die vierte $x = 0,2087$, welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem Bruche $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kömmt, ſo wird dieſer Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leiſten. Man ſetze alſo $x = \frac{1}{5}$, ſo bekömmt man

$$\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625},$$

und dieſes ſollte $= 0$ ſeyn, welches ſo ziemlich eintrifft.

§. 182.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflöſung Statt findet, iſt den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verſchiedene Zeichen haben. Eine ſolche Gleichung iſt demnach: $x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$, welche durch folgendes Product vorgeſtellet werden kann: $(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0$. Denn durch die Multiplication bekömmt man dieſe Gleichung: $x^4 + (p+q)ax^3 + (pq-2)aaxx - (p+q)a^3x + a^4$, welche mit der vorgegebenen einerley wird, wenn erſtlich $p + q = m$, und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; denn ſolchergeſtalt wird das vierte Glied von ſelbſt einerley. Man quadrire, wie vorher, die erſte Gleichung, ſo hat man $pp + 2pq + qq = mm$. Hiervon ſubtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, ſo bekömmt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$, woraus die Quadratwurzel iſt: $p - q = \sqrt{(mm - 4n - 8)}$, und daher erhalten wir

$$p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2} \text{ und } q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2}.$$

Hat man nun p und q gefunden, ſo giebt der erſte Factor dieſe zwey Wurzeln $x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp + 4)}$, und der zweyte giebt dieſe $x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq + 4)}$, und alſo hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

§. 183.

Es ſey z. B. dieſe Gleichung gegeben: $x^4 - 3 \times 2x^3 + 3 \times 8x + 16 = 0$. Hier iſt nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$; daher $\sqrt{(mm - 4n - 8)} = 1$; folglich $p = \frac{-3+1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3-1}{2} = -2$, woraus die zwey erſten Wurzeln ſeyn werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$, und die zwey letzten $x = 2 \pm \sqrt{8}$, ſo daß die vier geſuchten Wurzeln ſeyn müſſen: I.) $x = 1 + \sqrt{5}$, II.) $x = 1 - \sqrt{5}$, III.) $x = 2 + \sqrt{8}$, IV.) $x = 2 - \sqrt{8}$. Die vier Factoren unſerer Gleichung ſind alſo $(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8})$, welche wirklich mit einander multiplicirt unſere Gleichung hervorbringen. Denn der erſte und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx - 2x - 4$, und die beyden andern geben $xx - 4x - 4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$ geben, welches juſt die vorgegebene Gleichung iſt.

Vierzehntes Kapitel.

Von des Bombelli Regel, die Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen auf cubiſche zu bringen.

§. 184.

Da ſchon oben gezeigt worden iſt, wie die cubiſchen Gleichungen durch Hülfe der ſogenannten Cardaniſchen Regel aufgelöſt werden können, ſo kömmt die Hauptſache bey den biquadratiſchen Gleichungen darauf an, daß man die Auflöſung derſelben auf cubiſche Gleichungen zu bringen wiſſe; weil ohne Hülfe der cubiſchen Gleichungen es nicht

möglich iſt, die biquadratiſchen auf eine allgemeine Art aufzulöſen. Denn wenn man auch eine Wurzel gefunden hat, ſo erfordern doch die übrigen Wurzeln eine cubiſche Gleichung. Woraus man ſogleich erkennet, daß die Gleichungen von einem höhern Grade die Auflöſung aller niedrigern vorausſetzen. Hierzu hat nun ſchon vor vielen Jahren ein Italiener, Namens Bombelli, eine Regel gegeben, welche wir in dieſem Kapitel vortragen wollen.

§. 185.

Es ſey demnach die allgemeine biquadratiſche Gleichung gegeben: $x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0$, wo die Buchſtaben a, b, c, d alle nur erſinnliche Zahlen bedeuten können. Nun ſtelle man ſich vor, daß dieſe Gleichung mit der folgenden einerley ſey: $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo es nur darauf ankömmt, die Buchſtaben p und q und r ſo zu beſtimmen, daß die gegebene Gleichung herauskömmt. Bringt man nun dieſe letztere in Ordnung, ſo kömmt heraus

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}aaxx &+ apx + pp \\ + 2pxx &- 2qrx - rr \\ - qqxx. & \end{aligned}$$

Hier ſind nun die zwey erſten Glieder mit unſerer Gleichung ſchon einerley; für das dritte Glied muß man ſetzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$, woraus man bekömmt $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$. Für das vierte Glied muß man ſetzen $ap - 2qr = c$, woraus man erhält $2qr = ap - c$. Für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus $rr = pp - d$ wird. Aus dieſen drey Gleichungen müſſen nun die drey Buchſtaben p, q und r beſtimmt werden.

§. 186.

Um dieſes auf die leichteſte Art zu verrichten, ſo nehme man von der erſten Gleichung $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$ das Vierfache, d. i. $4qq = aa + 8p - 4b$, und multi-

plicire dieſes mit der letzten Gleichung $rr = pp - d$, ſo bekömmt man folgende Gleichung:
$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$. Nun quadrire man die mittlere Gleichung $2qr = ap - c$, wovon das Quadrat iſt $4qqrr = aapp - 2acp + cc$. Wir haben alſo zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich geſetzt, dieſe Gleichung geben: $8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc$, oder, wenn alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, $8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc$, welches eine cubiſche Gleichung $= 0$ iſt, woraus in einem jeden Falle der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln beſtimmt werden muß.

§. 187.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d, die drey Werthe des Buchſtabens p gefunden, wozu es genug iſt, nur einen davon entdeckt zu haben, ſo erhält man daraus ſogleich die beyden andern Buchſtaben q und r. Denn aus der erſten Gleichung bekömmt man $q = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + 2p - b)}$, und aus der zweyten $r = \frac{ap - c}{2q}$. Sind aber dieſe drey Buchſtaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, ſo können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgendergeſtalt beſtimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf dieſe Form gebracht haben: $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, ſo iſt $(xx + \frac{1}{2}ax + p)^2 = (qx + r)^2$, und die Quadratwurzel davon $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$. Die erſtere giebt $xx = (q - \frac{1}{2}a)x - p + r$, woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey aber werden aus der andern gefunden, welche alſo ausſieht: $xx = -(q + \frac{1}{2}a)x - p - r$.

§. 188.

Um dieſe Regel mit einem Beyſpiele zu erläutern, ſo ſey folgende Gleichung gegeben: $x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0$, welche mit unſerer allgemeinen Formel verglichen, giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$; woraus zur Beſtimmung des Buchſtabens p dieſe Gleichung erwächſt: $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche, durch 4 dividirt, $2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0$ giebt. Die Theiler der letzten Zahl ſind 1, 5, 7, 11 ꝛc., von welchen 1 keine Gleichung giebt, die 0 wird. Setzt man aber $p = 5$, ſo kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$ heraus; folglich iſt $p = 5$. Will man auch ſetzen $p = 7$, ſo erhält man $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; alſo iſt $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden, ſo dividire man die Gleichung durch 2; dieſes giebt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Gliede $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln iſt, die beyden erſtern aber zuſammen 12 ausmachen, ſo muß die dritte $\frac{11}{2}$ ſeyn. Alſo haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genug, nur eine zu wiſſen; weil aus einer jeden die vier Wurzeln unſerer biquadratiſchen Gleichung herauskommen müſſen.

§. 189.

Um dieſes zu zeigen, ſo ſey erſtlich $p = 5$; daraus wird alsdenn $q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = \frac{-50 + 50}{0} = \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts beſtimmt wird, ſo nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und alſo $r = 1$; daher unſere beyden Quadratgleichungen ſeyn werden:

$$\text{I.)}\ xx = 5x - 4, \quad \text{II.)}\ xx = 5x - 6.$$

Die erſtere giebt nun dieſe zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, alſo $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$.

Die andere aber giebt $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, alſo $x=\frac{5\pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x=3$, oder $x=2$.

Will man aber ſetzen $p=7$, ſo erhält man $q=\sqrt{(25+14-35)}=2$ und $r=\frac{-70+50}{4}=-5$, woraus dieſe zwey Quadratgleichungen entſtehen:

I.) $xx=7x-12$ und II.) $xx=3x-2$.

Die erſtere giebt $x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, alſo $x=\frac{7\pm 1}{2}$; daher $x=4$ und $x=3$.

Die andere giebt dieſe Wurzel $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}$, alſo $x=\frac{3\pm 1}{2}$; daher $x=2$ und $x=1$, welches die vier ſchon vorher gefundenen Wurzeln ſind. Und eben dieſelben folgen auch aus dem dritten Werthe $p=\frac{11}{2}$. Denn da wird $q=\sqrt{(25+11-35)}=1$ und $r=\frac{-55+50}{2}=-\frac{5}{2}$, woraus die beyden quadratiſchen Gleichungen fließen:

I.) $xx=6x-8$, und II.) $xx=4x-3$.

Aus der erſteren bekömmt man $x=3\pm\sqrt{1}$, alſo $x=4$ und $x=2$; aus der andern aber $x=2\pm\sqrt{1}$, alſo $x=3$ und $x=1$, welches die ſchon gefundenen vier Wurzeln ſind.

§. 190.

Es ſey ferner dieſe biquadratiſche Gleichung gegeben: $x^4-16x-12=0$, in welcher $a=0$, $b=0$, $c=-16$, und $d=-12$ iſt; daher unſere cubiſche Gleichung ſeyn wird: $8p^3+96p-256=0$, d. i. $p^3+12p-32=0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wenn man ſetzt $p=2t$; da wird nemlich $8t^3+24t-32=0$ oder $t^3+3t-4=0$. Die Theiler des letzten Gliedes ſind 1, 2, 4, aus welchen $t=1$ eine Wurzel iſt. Hieraus findet man $p=2$, und ferner $q=\sqrt{4}=2$, und $r=\frac{16}{4}=4$. Daher ſind die beyden Quadratgleichun-

gen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$; folglich die Wurzeln $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

§. 191.

Um die bisherige Auflöſung noch deutlicher zu machen, wollen wir dieſelbe bey dem folgenden Beyſpiele ganz wiederholen.

Es ſey alſo dieſe Gleichung gegeben:

$$x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4 = 0,$$

welche in folgender Formel enthalten ſeyn ſoll: $(x^2 - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im erſten Theile $-3x$ geſetzt worden iſt; weil -3 die Hälfte des Coefficienten -6 im zweyten Gliede der Gleichung iſt. Dieſe Form aber entwickelt giebt die Gleichung: $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)x^2 - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0$. Vergleicht man nun mit dieſer Form unſere Gleichung, ſo bekommt man:

I.) $2p + 9 - qq = 12$, II.) $6p + 2qr = 12$, III.) $pp - rr = 4$. Aus der erſten erhalten wir $qq = 2p - 3$; aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$; aus der dritten $rr = pp - 4$. Nun multiplicire man rr und qq mit einander, ſo bekömmt man

$$qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12.$$

Quadrirt man aber den Werth von qr, ſo kömmt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$ heraus. Daher erhalten wir dieſe Gleichung:

$$2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$$

$$\text{oder } 2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0,$$

und, wenn man dieſe Gleichung mit 2 dividirt,

$p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel $p = 2$ iſt. Hieraus wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$. Unſre Gleichung wird alſo ſeyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, und die Quadratwurzel hieraus: $xx - 3x + 2 = \pm x$. Gilt das obere Zeichen $+$, ſo hat man $xx = 4x - 2$;

gilt das untere Zeichen — aber, ſo wird $xx = 2x - 2$; woraus dieſe vier Wurzeln gefunden werden:

$$x = 2 \pm \sqrt{2} \text{ und } x = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

Funfzehntes Kapitel.

Von einer neuen Auflöſung der biquadratiſchen Gleichungen.

§. 192.

Man ſetze, die Wurzel einer biquadratiſchen Gleichung habe dieſe Form $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo die Buchſtaben p, q und r die drey Wurzeln einer ſolchen cubiſchen Gleichung andeuten, wie folgende iſt: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, ſo daß $p + q + r = f$, ferner $pq + pr + qr = g$ und $pqr = h$ iſt. Dieſes vorausgeſetzt, ſo quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wodurch man erhält

$$xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Da nun $p + q + r = f$ iſt, ſo wird ſeyn

$$xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}.$$

Nun nehme man nochmals die Quadrate, ſo wird

$$x^4 - 2fxx + f^2 = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$, ſo wird $x^4 - 2fxx + f^2 - 4g = 8\sqrt{pqr} \times (\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$. Weil aber $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = x$ und $pqr = h$, alſo $\sqrt{pqr} = \sqrt{h}$, ſo gelangen wir zu dieſer biquadratiſchen Gleichung: $x^4 - 2fxx - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$, wovon die Wurzel gewiß $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ iſt, und wo p, q und r die drey Wurzeln der obigen cubiſchen Gleichung ſind: $z^3 - fzz + gz - h = 0$.

§. 193.

Die herausgebrachte biquadratiſche Gleichung kann als allgemein angeſehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darinn mangelt. Denn man kann immer eine jede vollſtändige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es ſey alſo dieſe biquadratiſche Gleichung gegeben: $x^4 - axx - bx - c = 0$, wovon eine Wurzel gefunden werden ſoll. Man vergleiche dieſelbe daher mit der gefundenen Form, um dadurch die Buchſtaben f, g und h zu beſtimmen. Dazu wird erfordert, daß

I.) $2f = a$, alſo $f = \frac{a}{2}$. II.) $8\sqrt{h} = b$, alſo $h = \frac{bb}{64}$.

III.) $f^2 - 4g = -c$ oder $\frac{aa}{4} - 4g + c = 0$, oder $\frac{1}{4}aa + c = 4g$, folglich $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$.

Aus der gegebenen Gleichung $x^4 - axx - bx - c = 0$ findet man demnach die Buchſtaben f, g und h alſo beſtimmt: $f = \frac{1}{2}a$, $g = \frac{1}{16}aa + \frac{1}{4}c$, und $h = \frac{1}{64}bb$ oder $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$. Hieraus mache man dieſe cubiſche Gleichung: $z^3 - fzz + gz - h = 0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln ſuchen muß. Dieſelben mögen nun folgende ſeyn: I.) $z = p$, II.) $z = q$, III.) $z = r$; aus welchen, wenn ſie gefunden worden ſind, eine Wurzel unſerer biquadratiſchen Gleichung ſeyn wird $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

§. 194.

Solchergeſtalt ſcheint es zwar, daß nur eine Wurzel unſerer Gleichung gefunden werde; allein da ein jedes Quadratwurzelzeichen ſowohl negativ als poſitiv genommen werden kann, ſo erhält dieſe Form ſogar alle vier Wurzeln.

Wollte man alle Veränderungen der Zeichen gelten laſſen, ſo kämen 8 verſchiedene Werthe für x heraus, wovon aber nur viere gelten können. Denn es iſt zu be-

merken, daß das Product dieſer drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich ſeyn müſſe $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; daher, wenn $\frac{1}{8}b$ poſitiv iſt, ſo muß das Product der Theile auch poſitiv ſeyn, in welchem Falle nur dieſe vier Aenderungen gelten:

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$
III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Iſt aber $\frac{1}{8}b$ negativ, ſo ſind die vier Werthe von x folgende:

I.) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
II.) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$
III.) $x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
IV.) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$.

Durch Hülfe dieſer Anmerkung können in jeglichem Falle alle vier Wurzeln beſtimmt werden, wie aus folgendem Beyſpiele zu erſehen iſt.

§. 195.

Es ſey dieſe biquadratiſche Gleichung gegeben, in welcher das zweyte Glied fehlt:

$$x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0,$$

welche, mit der obigen Formel verglichen, $a = 25$, $b = -60$, und $c = 36$ giebt, woraus man ferner erhält $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$ und $h = \frac{225}{4}$. Folglich iſt nunmehr unſere cubiſche Gleichung:

$$z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Um hier die Brüche wegzubringen, ſo ſetze man $z = \frac{u}{4}$; hierdurch wird $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \times \frac{uu}{16} + \frac{769}{16} \times \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, woraus man, wenn man mit 64 multiplicirt, erhält $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, wovon die drey Wurzeln geſucht werden müſſen, welche alle drey poſitiv ſind, und wovon eine Wurzel $u = 9$ iſt. Um die zweyte

zu finden, ſo theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kömmt dieſe neue Gleichung heraus: $uu - 41u + 400 = 0$ oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4})} = \frac{41 \pm 9}{2}$. Folglich ſind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$; daher wir nunmehr erhalten:

$$\text{I.) } z = \tfrac{9}{4}. \quad \text{II.) } z = 4. \quad \text{III.) } z = \tfrac{25}{4}.$$

Dieſes ſind nun die Werthe der Buchſtaben p, q und r, alſo daß $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$ und $r = \frac{25}{4}$. Weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$, und dieſer Werth $= \frac{1}{2}b$ negativ iſt, ſo muß man ſich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, darnach richten. Es muß nemlich entweder nur ein — oder drey — vorhanden ſeyn. Da nun $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{q} = 2$ und $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, ſo werden die vier Wurzeln unſerer vorgegebenen Gleichung ſeyn:

$$\text{I.) } x = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = 1,$$
$$\text{II.) } x = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = 2,$$
$$\text{III.) } x = -\tfrac{3}{2} + 2 + \tfrac{5}{2} = 3,$$
$$\text{IV.) } x = -\tfrac{3}{2} - 2 - \tfrac{5}{2} = -6;$$

aus welchen dieſe vier Factoren der Gleichung entſtehen: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 6) = 0$, wovon die beyden erſten das Product $xx - 3x + 2$, die beyden letzten aber $xx + 3x - 18$ geben, und dieſe zwey Producte mit einander multiplicirt, bringen juſt unſere Gleichung hervor.

§. 196.

Nun iſt noch übrig zu zeigen, wie eine biquadratiſche Gleichung, in welcher das zweyte Glied vorhanden iſt, in eine andere verwandelt werden könne, worin das zweyte Glied fehlt, wozu folgende Regel dienet.

Es ſey dieſe allgemeine Gleichung gegeben: $y^4 + ay^3 + byy + cy + d = 0$. Hier ſetze man zu y den vierten Theil des Coefficienten von dem zweyten Gliede, nemlich $\frac{1}{4}a$, und ſchreibe dafür einen neuen Buchſtaben z. B. x, ſo daß $y + \frac{1}{4}a = x$, folg-

lich $y = x - \frac{1}{4}a$ und $yy = xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}aa$, ferner $y^3 = x^3 - \frac{3}{4}axx + \frac{3}{16}aax - \frac{1}{64}a^3$, und daraus endlich:

$$\begin{array}{rrrrrr}
y^4 = & x^4 & - ax^3 & + \frac{3}{8}aaxx & - \frac{1}{16}a^3x & + \frac{1}{256}a^4 \\
+ ay^3 = & & + ax^3 & - \frac{3}{4}aaxx & + \frac{3}{16}a^3x & - \frac{1}{64}a^4 \\
+ byy = & & & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
+ cy = & & & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
+ d = & & & & & + d \\
\hline
& x^4 & + 0 & - \frac{3}{8}aaxx & + \frac{1}{8}a^3x & - \frac{3}{256}a^4 \\
& & & + bxx & - \frac{1}{2}abx & + \frac{1}{16}aab \\
& & & & + cx & - \frac{1}{4}ac \\
& & & & & + d
\end{array} \Bigg\} = 0$$

in welcher Gleichung, wie man ſieht, das zweyte Glied weggefallen iſt, ſo daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden, und daraus die vier Wurzeln von x beſtimmen kann, aus welchen ſich hernach die vier Werthe von y ergeben; weil $y = x - \frac{1}{4}a$.

§. 197.

So weit iſt man bisher in Auflöſung der algebraiſchen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen, die Gleichungen vom fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulöſen, oder zum wenigſten auf die niedrigſten Grade zu bringen, ſind fruchtlos geweſen, ſo daß man nicht im Stande iſt, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles, was man darinnen geleiſtet hat, geht nur auf ganz beſondere Fälle, worunter derjenige der vornehmſte iſt, wenn irgend eine Rationalwurzel Statt findet, als welche durch Probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieſelbe immer ein Theiler des letzten Gliedes ſeyn muß; und hiermit iſt es eben ſo beſchaffen, wie wir ſchon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grade geſehen haben.

§. 198.

Es wird doch noch nöthig ſeyn, dieſe Regel auch

auf eine ſolche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational ſind.

Eine ſolche Gleichung ſey nun dieſe:

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegſchaffen; daher ſetze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil des Coefficienten von dem zweyten Gliede, nemlich $y - 2 = x$, ſo wird $y = x + 2$, und $yy = xx + 4x + 4$, ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$,

$$\begin{array}{lrrrrr}
\text{und } y^4 = & x^4 & + 8x^3 & + 24xx & + 32x & + 16 \\
- 8y^3 = & & - 8x^3 & - 48xx & - 96x & - 64 \\
+ 14yy = & & & + 14xx & + 56x & + 56 \\
+ 4y = & & & & + 4x & + 8 \\
- 8 = & & & & & - 8 \\
\hline
\text{Alſo } & x^4 & + 0 & - 10xx & - 4x & + 8 = 0.
\end{array}$$

Dieſe Gleichung mit unſerer allgemeinen Form verglichen, giebt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach ſchließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Hieraus erhellt, daß das Product $\sqrt{pqr}$ poſitiv ſeyn wird. Die cubiſche Gleichung wird demnach ſeyn: $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher die drey Wurzeln p, q und r geſucht werden müſſen.

Hier müſſen nun erſtlich die Brüche weggeſchafft werden; deswegen ſetze man $z = \frac{u}{2}$, ſo wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \times \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$. Dieſe Gleichung mit 8 multiplicirt, giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln poſitiv ſind. Da nun die Theiler des letzten Gliedes 1 und 2 ſind, ſo ſey erſtlich $u = 1$, alsdann wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$, und alſo nicht 0. Setzt man aber $u = 2$, ſo wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$. Daher iſt eine Wurzel $u = 2$. Um die andere zu finden, ſo theile man die Gleichung durch $u - 2$ folgendergeſtalt:

$$
\begin{array}{l}
u - 2)\,u^3 - 10uu + 17u - 2\,(uu - 8u + 1 \\
\underline{\;\;\;\;\;u^3 - 2uu\;\;\;\;\;} \\
\;\;\;\;\;\;\; - 8uu + 17u \\
\;\;\;\;\;\;\; \underline{- 8uu + 16u} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; u - 2 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \underline{u - 2} \\
\; 0
\end{array}
$$

Setzt man nun $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, ſo ſind die beyden übrigen Wurzeln $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Und da $z = \frac{1}{2}u$, ſo ſind die drey Wurzeln der cubiſchen Gleichung folgende:

$$\text{I.)}\; z = p = 1. \quad \text{II.)}\; z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}, \text{ und}$$

$$\text{III.)}\; z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}.$$

§. 199.

Da wir nun p, q und r gefunden haben, ſo werden ihre Quadratwurzeln ſeyn

$$\sqrt{p} = 1,\; \sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2} \text{ und } \sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}.$$

Weil aber, wie oben (§. 99.) gezeigt worden iſt, die Quadratwurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(aa - b)} = b$, folgendergeſtalt ausgedrückt werden kann:

$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$, ſo iſt für unſern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$; folglich $b = 60$ und $c = 2$. Hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Da wir nun gefunden haben

$$\sqrt{p} = 1,\; \sqrt{q} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \text{ und } \sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2},$$

ſo werden die vier Werthe für x, da wir wiſſen, daß derſelben Product poſitiv ſeyn muß, folgendergeſtalt beſchaffen ſeyn:

$$\text{I.})\ x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$
$$= 1 + \sqrt{5}.$$

$$\text{II.})\ x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$
$$= 1 - \sqrt{5}.$$

$$\text{III.})\ x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$
$$= -1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{IV.})\ x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$
$$= -1 - \sqrt{3}.$$

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, ſo ſind die vier Wurzeln derſelben

I.) $y = 3 + \sqrt{5}$. II.) $y = 3 - \sqrt{5}$.
III.) $y = 1 + \sqrt{3}$. IV.) $y = 1 - \sqrt{3}$.

Sechszehntes Kapitel.

Von der Auflöſung der Gleichungen durch Näherung.

§. 200.

Wenn die Wurzeln einer Gleichung nicht rational ſind, dieſelben mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können, oder nicht, ſo muß man ſich begnügen, den Werth derſelben durch Näherungen zu beſtimmen, dergeſtalt, daß man dem wahren Werthe derſelben immer näher komme, bis der Fehler endlich für nichts zu achten iſt. Es ſind zu dieſem Ende verſchiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmſten hier erklären wollen.

Das erſte Mittel beſteht darinnen, daß man den Werth einer Wurzel ſchon ziemlich genau erforſcht habe,

und z. B. ſchon wiſſe, daß derſelbe größer ſey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdenn ſetze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da denn p gewiß einen Bruch bedeuten wird. Iſt aber p ein Bruch, und alſo kleiner als 1, ſo iſt das Quadrat, der Cubus und eine jegliche höhere Potenz von p noch weit kleiner. So iſt z. B. das Quadrat von $\frac{1}{10}$ d. i. $\frac{1}{100}$ zehnmal kleiner als $\frac{1}{10}$, und der Cubus, nemlich $\frac{1}{1000}$ wieder zehnmal kleiner als das Quadrat $\frac{1}{100}$; daher man die Dignitäten ſolcher Brüche aus der Rechnung weglaſſen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankömmt. Hat man nun weiter dieſen Bruch p nur beynahe beſtimmt, ſo kennt man die Wurzel $4 + p$ ſchon genauer. Hierauf erforſcht man gleichergeſtalt einen noch genauern Werth, und geht ſolchergeſtalt ſo weit fort, bis man der Wahrheit ſo nahe gekommen iſt, als man wünſchet.

§. 201.

Wir wollen dieſes zuerſt durch ein leichtes Beyſpiel erläutern, und die Wurzel dieſer Gleichung $xx = 20$ durch Näherungen beſtimmen.

Hier ſieht man ſchon, daß x größer iſt als 4, und doch kleiner als 5; daher ſetze man $x = 4 + p$, ſo wird $xx = 16 + 8p + pp = 20$. Weil aber pp ſehr klein iſt, ſo laſſe man dieſes Glied weg, um folgende Gleichung zu haben: $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$. Hieraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$, welches der Wahrheit ſchon weit näher kömmt, ob man gleich ſieht, daß $4\frac{1}{2}$ etwas zu groß iſt *). Man ſetze daher ferner $x = 4\frac{1}{2} - p$, ſo iſt man

*) Anfänger, denen es nicht ſogleich einleuchtend ſeyn möchte, daß $4\frac{1}{2}$ größer als x, oder $\frac{1}{2}$ größer als p iſt, dürfen nur folgende Betrachtung anſtellen. Weil eigentlich die drey Theile $16+8p+p^2$ die Zahl 20 ausmachen, ſo müſſen die zwey Theile $16+8p$ nothwendig kleiner als 20, und daher, wenn man 16 abzieht, 8p kleiner als 4, folglich auch der achte Theil von 8p d. i. p kleiner als der achte Theil von 4 d. i. $\frac{1}{2}$, oder umgewendet $\frac{1}{2}$ größer als p ſeyn.

gewiß, daß p ein noch weit kleinerer Bruch ſeyn werde, als vorher; daher pp jetzt mit noch größerem Rechte weggelaſſen werden kann. Man wird alſo haben $xx = 20\frac{1}{4} - 9p + pp = 20$, und wenn man pp wegläßt, $20\frac{1}{4} - 9p = 20$, oder $20\frac{1}{4} - 20 = 9p$ d. i. $\frac{1}{4} = 9p$, und alſo $p = \frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man nun dieſe Rechnung weiter fortſetzen, ſo würde man endlich der Wahrheit ſo nahe kommen, daß man den Fehler für nichts anſehen könnte.

§. 202.

Um dieſes allgemeiner zu machen, ſo ſey folgende Gleichung $xx = a$ gegeben, und man wiſſe ſchon, daß x größer iſt als n, doch aber kleiner als $n + 1$. Man ſetze alſo $x = n + p$, ſo daß p ein wahrer Bruch ſeyn muß, und daher pp als ſehr klein verworfen werden kann. Weil nun $x^2 = (n + p)^2 = nn + 2np + pp = a$, ſo wird, wenn man pp wegläßt, $xx = nn + 2np = a$, alſo $2np = a - nn$ und $p = \frac{a - nn}{2n}$; folglich $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit ſchon nahe, ſo kömmt dieſer neue Werth $\frac{nn + a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Dieſen ſetze man von neuem für n, ſo wird man der Wahrheit noch näher kommen, und wenn man dieſen neuen Werth nochmals für n ſetzet, ſo wird man noch näher zutreffen; und ſolchergeſtalt kann man fortgehen, ſo weit man will.

Es ſey z. B. $a = 2$, oder man verlangt die Quadratwurzel aus 2 zu wiſſen. Hat man nun dafür ſchon einen ziemlich nahen Werth gefunden, welcher wiederum n heißen kann, ſo wird $\frac{nn + 2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben.

Es ſey daher I.) $n = 1$, ſo wird $x = \frac{3}{2}$,
II.) $n = \frac{3}{2}$, ſo wird $x = \frac{17}{12}$,
III.) $n = \frac{17}{12}$, ſo wird $x = \frac{577}{408}$,

welcher letzte Werth der $\sqrt{2}$ ſchon ſo nahe kömmt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer iſt als 2.

§. 203.

Eben ſo kann man verfahren, wenn eine höhere Wurzel durch Näherung gefunden werden ſoll.

Es ſey z. B. dieſe cubiſche Gleichung $x^3 = a$ gegeben, oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden. Dieſe Cubikwurzel ſey nun beynahe $= n$, und man ſetze $x = n + p$, ſo wird, wenn man pp und die höheren Poteſtäten davon wegläßt, $x^3 = n^3 + 3nnp = a$; daher $3nnp = a - n^3$ und $p = \frac{a - n^3}{3nn}$; folglich $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Kömmt alſo n der Cubikwurzel aus a ſchon ziemlich nahe, ſo kömmt dieſe Form ihr gewiß noch näher. Setzt man nun dieſen neuen Werth wiederum für n, ſo wird dieſe Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und ſo kann man fortgehen, ſo weit als man will.

Es ſey z. B. $x^3 = 2$, oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welcher die Zahl n ſchon ziemlich nahe komme, ſo wird dieſe Formel $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$ ihr noch näher kommen. Daher ſetze man

I.) $n = 1$, ſo wird $x = \frac{4}{3}$,
II.) $n = \frac{4}{3}$, ſo wird $x = \frac{91}{72}$,
III.) $n = \frac{91}{72}$, ſo wird $x = \frac{162130806}{128034294}$.

§. 204.

Vermittelſt dieſer Methode laſſen ſich auch die Wurzeln aus allen übrigen Gleichungen durch Näherungen finden. Es ſey zu dieſem Ende die folgende allgemeine cubiſche Gleichung gegeben: $x^3 + axx + bx + c = 0$, und n zeige wiederum eine Zahl an, die einer Wurzel ſchon ziemlich nahe kömmt. Man ſetze daher $x = n - p$, und da p ein Bruch ſeyn ſoll, ſo laſſe man pp und die höhern Potenzen davon weg. Solchergeſtalt bekömmt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus dieſe Gleichung entſteht: $n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0$, oder $n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp$ $= (3nn + 2an + b)p$; daher $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$, und folglich bekommen wir für x folgenden genaueren Werth $x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$. Setzt man nun dieſen neuen Werth wiederum für n, ſo erhält man dadurch einen andern, welcher der Wahrheit noch näher kömmt.

Es ſey z. B. $x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$ iſt; daher wird, wenn n einer Wurzel ſchon nahe kömmt, ein noch näherer Werth ſeyn $x = \frac{2n^3 + 2n^2 + 50}{3n^2 + 4n + 3}$. Nun aber kömmt der Werth $x = 3$ der Wahrheit ſchon ziemlich nahe; daher ſetze man $n = 3$, ſo erhält man $x = \frac{122}{42} = \frac{61}{21}$. Wollte man nun dieſen Werth wiederum für n ſchreiben, ſo würde man einen neuen Werth bekommen, der ſich der Wahrheit noch weit mehr näherte.

§. 205.

Dieſes iſt nun die bekannteſte Art, die Wurzeln einer Gleichung durch Näherung zu finden, welche

auch in allen Fällen mit Nutzen angebracht werden kann. Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen, welche, wegen der Leichtigkeit der Rechnung, unſere Aufmerkſamkeit, obgleich keinen Vorzug vor jener, verdienet. Der Grund derſelben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen ſuche, als a, b, c ꝛc., die ſo beſchaffen ſind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um ſo viel genauer anzeige, je weiter man dieſe Reihe Zahlen fortſetzet.

Wir wollen annehmen, daß wir damit ſchon bis zu den Gliedern p, q, r, s, t ꝛc. gekommen wären, ſo muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x ſchon ziemlich genau anzeigen, oder es wird beyläufig $\frac{q}{p} = x$ ſeyn.

Eben ſo wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication dieſer beyden Gleichungen erhalten $\frac{r}{p} = xx$. Da auch $\frac{s}{r} = x$, ſo wird ferner $\frac{s}{r} \times \frac{r}{p} = \frac{s}{p} = x \times x^2 = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$, ſo wird $\frac{t}{s} \times \frac{s}{p} = \frac{t}{p} = x \times x^3 = x^4$ ſeyn, u. ſ. w.

Um dieſes zu erläutern, wollen wir folgende quadratiſche Gleichung betrachten: $xx = x + 1$, und wiederum ſetzen, daß in der obgedachten Reihe von Zahlen dieſe Glieder p, q, r, s, t, ꝛc. vorkämen. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = xx$, ſo erhalten wir daraus dieſe Gleichung: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, oder, wenn mit p auf beyden Seiten multiplicirt wird, $r = q + p$. Eben ſo wird auch ſeyn $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unſerer Reihe die Summe

der beyden vorhergehenden iſt, wodurch die Reihe, ſo weit man will, leicht fortgeſetzt werden kann, wenn man nur einmal die zwey erſten Glieder hat, welche man nach Belieben annehmen kann. Daher ſetze man z. B. dafür 0, 1, ſo wird unſere Reihe alſo herauskommen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ꝛc. wo von den entfernten Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt den Werth für x ſo viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgeſetzt hat. Von Anfang iſt zwar der Fehler ſehr groß, wird aber, je weiter man geht, deſto geringer. Dieſe der Wahrheit immer näher kommenden Werthe von x gehen demnach folgendergeſtalt fort:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89} \text{ ꝛc.}$$

wovon z. B. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt; die folgenden Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

§. 206.

Laßt uns nun auch dieſe Gleichung betrachten: $x^2 = 2x + 1$. Weil hier allezeit $x = \frac{q}{p}$ und $x^2 = \frac{r}{p}$, ſo erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, und wenn man mit p multiplicirt, $r = 2q + p$, woraus wir ſehen, daß ein jedes Glied doppelt genommen und zu dem vorhergehenden addirt, das folgende Glied giebt. Wenn wir alſo wieder mit 0, 1 anfangen, ſo bekommen wir dieſe Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 ꝛc.

daher der geſuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird:

$$x = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \frac{408}{169} \text{ ꝛc.}$$

welche folglich dem wahren Werthe $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg, ſo geben die übrig bleibenden Brüche den Werth von

$\sqrt{2}$ immer genauer: $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}$ ꝛc. von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat $\frac{9801}{4900}$ hat, welches nur um $\frac{1}{4900}$ größer iſt als 2.

§. 207.

Bey höhern Gleichungen findet dieſe Methode ebenfalls Statt. Denn wenn z. B. folgende cubiſche Gleichung gegeben wäre: $x^3 = xx + 2x + 1$, ſo ſetze man wieder $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ und $x^3 = \frac{s}{p}$. Hier bekömmt man $s = r + 2q + p$, woraus man ſieht, wie man aus den drey Gliedern p, q und r das folgende s finden ſoll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann. Eine ſolche Reihe wird demnach ſeyn:

0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 ꝛc.

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer geben werden:

$$x = \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}, \text{ꝛc.}$$

Die erſten von dieſen weichen zwar von der Wahrheit ſehr merklich ab; dieſer aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, wo der Fehler nur $\frac{13}{343}$ iſt.

§. 208.

Es ſind aber nicht alle Gleichungen ſo beſchaffen, daß man dieſe Methode darauf anwenden könnte; beſonders in den Fällen, wo das zweyte Glied fehlt, kann dieſelbe nicht gebraucht werden. Denn es ſey z. B. $xx = 2$, und man wollte ſetzen $x = \frac{q}{p}$, und $xx = \frac{r}{p}$, ſo würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$, oder $r = 2p$ d. i. $r = 0q + 2p$, woraus dieſe Reihe von Zahlen entſtünde:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32 ꝛc.

welche ganz unbrauchbar wäre, indem ein jedes Glied, durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$, oder $x = 2$ giebt. Es kann aber dieſem abgeholfen werden, wenn man ſetzt $x = y - 1$; denn ſo bekömmt man $yy + 2y - 1 = 2$, und wenn man hier ſetzt $y = \frac{q}{p}$ und $yy = \frac{r}{p}$, ſo erhält man die oben ſchon gegebene Näherung.

§. 209.

Bey dieſer Methode iſt ferner noch folgendes zu bemerken. Wenn die Gleichung eine Rationalwurzel hat, und der Anfang der Reihe alſo angenommen wird, daß daraus dieſe Wurzel herauskömmt, ſo wird auch jedes folgende Glied derſelben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieſelbe Wurzel genau geben.

Um dieſes zu zeigen, ſo ſey dieſe Gleichung gegeben: $xx = x + 2$, worinnen eine Wurzel $x = 2$ iſt. Da man nun hier wiederum $\frac{q}{p} = x$ und auch $\frac{r}{q} = x$, folglich $\frac{r}{p} = x^2$ ſetzen kann, ſo verwandelt ſich die Gleichung $x^2 = x + 2$ in folgende: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 2$, aus welcher man durch die Multiplication mit p erhält: $r = q + 2p$. Wählt man nun zu den erſten beyden Gliedern 1 und 2, ſo entſteht dieſe Reihe: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ꝛc. d. i. eine geometriſche Progreſſion, deren Nenner $= 2$ iſt.

Eben dieſes erhellet auch aus folgender cubiſchen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel iſt $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, ſo findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ dieſe Reihe: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc. d. i. wieder eine geometriſche Progreſſion, deren Nenner $= 3$ iſt.

§. 210.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieſer Wurzel ab, ſo folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derſelben Wurzel kommen werde. Denn wenn die Gleichung mehr Wurzeln hat, ſo naͤhert ſich dieſe Reihe immer nur der groͤßten Wurzel, und die kleinere erhaͤlt man nicht anders, als wenn juſt der Anfang nach derſelben eingerichtet wird. Dieſes wird durch ein Beyſpiel deutlicher werden. Es ſey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln $x = 1$ und $x = 3$ ſind. Nun iſt hier die Formel fuͤr die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$, und ſetzt man fuͤr den Anfang derſelben 1, 1, nemlich fuͤr die kleinere Wurzel, ſo wird die ganze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ꝛc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinnen die groͤßere Wurzel enthalten iſt, ſo wird die Reihe:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ꝛc.

wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man den Anfang anders, nach Belieben, nur daß darin die kleinere Wurzel nicht genau enthalten iſt, ſo naͤhert ſich die Reihe immer der groͤßern Wurzel 3, wie man aus folgenden Reihen ſehen kann.

Der Anfang ſey 0, 1, 4, 13, 40, 121, 364, ꝛc.
ferner 1, 2, 5, 14, 41, 122, 365, ꝛc.
ferner 2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, ꝛc.
ferner 2, 1, −2, −11, −38, −118, −362, −1091, −3278, ꝛc.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt ſolche Quotienten geben, die immer der groͤßern Wurzel 3, niemals aber der kleinern, naͤher kommen.

Außer dieſen zwey Methoden, die Wurzel einer Gleichung durch Naͤherung zu finden, trifft man hin und wieder noch andere an, die aber entweder zu muͤh-

ſam oder nicht allgemein ſind. Vor allen aber verdient die hier zuerſt erklärte Methode den Vorzug, weil dieſelbe auf alle Arten von Gleichungen mit erwünſchtem Erfolg angewendet werden kann, dahingegen die andere oft eine gewiſſe Vorbereitung erfordert, ohne welche ſie ſich nicht einmal gebrauchen läßt, wie hier ſchon verſchiedene Beyſpiele gelehrt haben.

Des

Zweyten Theils

Zweyter Abſchnitt.

Von der unbeſtimmten Analytik.

Erſtes Kapitel.

Von der Auflöſung ſolcher einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt.

§. 211.

Wir haben oben geſehen, daß eine einzige unbekannte Zahl auch nur eine einzige Gleichung erfordert, zwey unbekannte Zahlen aber durch zwey Gleichungen, drey durch drey, vier durch vier Gleichungen u. ſ. f. beſtimmt werden müſſen; ſo daß allezeit eben ſo viel Gleichungen nöthig ſind, als unbekannte Zahlen beſtimmt werden ſollen, wenn anders die Aufgabe ſelbſt hinlänglich beſtimmt iſt.

Wenn aber nicht ſo viel Gleichungen aus den in der Aufgabe bekannt gemachten Umſtänden gezogen werden können, als unbekannte Zahlen angenommen worden ſind, ſo bleiben einige unbeſtimmt, und werden unſerer Willkühr überlaſſen; daher ſolche Aufgaben unbeſtimmte genannt werden, welche einen eigenen Theil der Analytik ausmachen, den man die unbeſtimmte Analytik zu nennen pflegt.

§. 212.

Da in dieſen Fällen eine oder mehr unbekannte Zahlen nach unſerm Belieben angenommen werden können, ſo finden in der That viele Auflöſungen Statt.

Allein es wird gemeiniglich dieſe Bedingung hinzugefügt, daß die geſuchten Zahlen ganze, und ſogar poſitive, oder zum wenigſten Rationalzahlen ſeyn ſollen; wodurch die Anzahl der möglichen Auflöſungen ungemein eingeſchränkt wird, ſo daß öfters nur etliche wenige, öfters zwar unendlich viele, welche aber nicht ſo leicht in die

Augen fallen, Statt finden, bisweilen auch nicht einmal eine einzige möglich iſt. Daher dieſer Theil der Analytik oft ganz beſondere Kunſtgriffe erfordert, und nicht wenig dienet, den Verſtand der Anfänger aufzuklären, und ihnen eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

§. 213.

Wir wollen mit einer der leichteſten Aufgaben den Anfang machen, und zwey ganze, poſitive Zahlen ſuchen, deren Summe 10 ſeyn ſoll.

Dieſe Zahlen ſeyen nun x und y, ſo iſt $x + y = 10$, und folglich $x = 10 - y$, ſo daß y nicht anders beſtimmt wird, als daß es eine ganze und poſitive Zahl ſeyn ſoll. Man könnte daher für y alle ganze Zahlen, von 1 bis ins Unendliche annehmen. Da aber x auch poſitiv ſeyn muß, ſo kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil ſonſt x negativ ſeyn würde; und wenn auch 0 nicht gelten ſoll, ſo kann y höchſtens 9 geſetzt werden, weil ſonſt $x = 0$ würde; daher folgende Auflöſungen Statt finden:

Iſt $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$
ſo wird $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Von dieſen neun Auflöſungen aber ſind die vier letztern mit den vier erſtern einerley; daher es in allen nur fünf verſchiedene Auflöſungen giebt.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, ſo dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen wiederum in zwey Theile zertheilen, wodurch man eine größere Menge Auflöſungen erhalten würde.

§. 214.

Von dieſer überaus leichten Aufgabe wollen wir zu etwas ſchwereren fortſchreiten.

I. Aufgabe. Man ſoll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine ſich durch 2, der andere aber durch 3 dividiren läßt, beyde aber ganze und poſitive Zahlen ſind.

Es ſey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, ſo muß

$2x+3y=25$ ſeyn. Alſo $2x=25-3y$. Man theile durch 2, ſo kömmt $x=\frac{25-3y}{2}$; woraus wir zuerſt ſehen, daß $3y$ kleiner ſeyn muß, als 25, und daher y nicht größer als 8. Man ziehe ſo viel Ganze daraus, als möglich, d. i. man dividire den Zähler $25-3y$ durch den Nenner 2, ſo wird $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; alſo muß ſich $1-y$, oder auch $y-1$ durch 2 theilen laſſen. Man ſetze daher $y-1=2z$, und alſo $y=2z+1$, ſo wird $x=12-2z-1-z=11-3z$. Weil nun y nicht größer ſeyn kann als 8, ſo können auch für z keine andere Zahlen angenommen werden, als ſolche, die $2z+1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner ſeyn als 4; daher z nicht größer als 3 angenommen werden kann, woraus dieſe Auflöſungen folgen:

Setzt man $z=0$,	$z=1$,	$z=2$,	$z=3$,
ſo wird $y=1$,	$y=3$,	$y=5$,	$y=7$,
und $x=11$,	$x=8$,	$x=5$,	$x=2$.

Daher die geſuchten zwey Theile von 25 ſeyn werden: I.) $22+3$. II.) $16+9$. III.) $10+15$. IV.) $4+21$.

§. 215.

II. **Aufgabe.** Man theile 100 in zwey Theile, die aber folgende Eigenſchaft haben müſſen: wenn man den erſten durch 5 dividirt, ſo muß 2 übrig bleiben; und wenn man den zweyten durch 7 dividirt, ſo muß der Reſt 4 ſeyn.

Da der erſte Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt, ſo ſetze man denſelben $5x+2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, ſo ſetze man denſelben $7y+4$; alſo wird $5x+7y+6=100$ oder $5x=94-7y=90+4-5y-2y$.

Hieraus erhält man $x=18-y-\frac{2y+4}{3}$; alſo muß $4-2y$, oder $2y-4$, oder auch die Hälfte davon $y-2$ durch 5 theilbar ſeyn. Man ſetze daher

$y - 2 = 5z$, oder $y = 5z + 2$, ſo wird $x = 16 - 7z$; woraus erhellet, daß $7z$ kleiner ſeyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$, und alſo nicht größer als 2. Wir haben alſo hier drey Auflöſungen.

I.) $z = 0$ giebt $x = 16$ und $y = 2$; daher die beyden geſuchten Theile von 100 ſeyn werden $82 + 18$.

II.) $z = 1$ giebt $x = 9$ und $y = 7$; daher die beyden Theile auch ſeyn können $47 + 53$.

III.) $z = 2$ giebt $x = 2$ und $y = 12$; woraus man für die verlangten beyden Theile erhält $12 + 88$.

§. 216.

III. Aufgabe. Zwey Bäuerinnen haben zuſammen 100 Eyer. Die erſte ſpricht: wenn ich die meinigen immer zu 8 überzähle, ſo bleiben 7 übrig; die andere ſpricht: wenn ich die meinigen zu 10 überzähle, ſo bleiben mir auch 7 übrig. Wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Anzahl der Eyer der erſten Bäuerinn durch 8 dividirt 7 übrig läßt, und die Zahl der Eyer der zweyten Bäuerinn durch 10 dividirt auch 7 übrig läßt, ſo ſetze man die Zahl der erſten $8x + 7$, der andern aber $10y + 7$, ſo daß $8x + 10y + 14 = 100$, oder $8x = 86 - 10y$, oder $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$. Daher ſetze man $y - 3 = 4z$, ſo wird $y = 4z + 3$ und $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$. Folglich muß $5z$ kleiner ſeyn als 7, und alſo z kleiner als 2; woraus folgende zwey Auflöſungen entſpringen:

I.) $z = 0$ giebt $x = 7$ und $y = 3$; daher die erſte Bäuerinn 63 Eyer gehabt haben kann, die andere aber 37.

II.) $z = 1$ giebt $x = 2$ und $y = 7$; daher auch die erſte Bäuerinn 23 Eyer, die andere aber 77 Eyer gehabt haben kann.

§. 217.

IV. Aufgabe. Eine Geſellſchaft von Männern und Weibern haben zuſammen 41 Thaler 16 Groſchen verzehrt. Ein Mann hat bezahlt 19 Groſchen, eine

Frau aber 13 Groſchen; wie viel ſind es Männer und Weiber geweſen?

Die Zahl der Männer ſey $=x$, der Weiber aber $=y$, ſo bekömmt man, weil 41 Rthl. 16 Gr. 1000 Gr. ausmachen, dieſe Gleichung: $19x + 13y = 1000$. Daraus wird folgende: $13y = 1000 - 19x$, oder

$$13y = 988 + 12 - 13x - 6x,$$

und daher $y = 76 - x + \frac{12 - 6x}{13}$. Folglich muß ſich $12 - 6x$ oder $6x - 12$ durch 13 theilen laſſen, welches allemal geſchehen wird, wenn ſich der ſechſte Theil davon, nemlich $x - 2$, durch 13 dividiren läßt. Man ſetze alſo $x - 2 = 13z$, ſo wird $x = 13z + 2$, und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$, oder $y = 74 - 19z$. Es muß alſo z kleiner ſeyn, als $7\frac{4}{19}$, und folglich kleiner als 4; daher folgende vier Auflöſungen Statt finden:

I.) $z = 0$ giebt $x = 2$ und $y = 74$. Es können alſo 2 Männer und 74 Weiber geweſen ſeyn; jene haben bezahlt 38, dieſe aber 962 Groſchen.

II.) $z = 1$ giebt die Zahl der Männer $x = 15$, und die Zahl der Weiber $y = 55$; jene haben verzehrt 285, dieſe aber 715 Groſchen.

III.) $z = 2$ giebt die Zahl der Männer $x = 28$, und die Zahl der Weiber $y = 36$; jene haben verzehrt 532, dieſe aber 468 Groſchen.

IV.) $z = 3$ giebt die Zahl der Männer $x = 41$, und die Zahl der Weiber $y = 17$; jene haben verzehrt 779, dieſe aber 221 Groſchen.

§. 218.

V. Aufgabe. Ein Amtmann kauft Pferde und Ochſen zuſammen für 1770 Thaler. Für ein Pferd zahlt er 31 Thaler, für einen Ochſen aber 21 Thaler. Wie viel ſind es Pferde und Ochſen geweſen?

Die Zahl der Pferde ſey $=x$, der Ochſen aber $=y$, ſo muß ſeyn: $31x + 21y = 1770$, oder $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$,

und alſo $y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21}$. Daher muß $6 - 10x$ oder $10x - 6$ durch 21 theilbar ſeyn. Wäre nun die Hälfte $5x - 3$ durch 21 theilbar, ſo würde es auch $10x - 6$ ſeyn. Man ſetze alſo $5x - 3 = 21z$, ſo iſt $5x = 21z + 3$, ſo daß $y = 84 - x - 2z$ und $x = \frac{21z + 3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z + 3}{5}$ wird. Man ſetze nun ferner $z + 3 = 5u$, ſo wird $z = 5u - 3$, $x = 21u - 12$ und $y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u$; daher u größer ſeyn muß als 0, und doch kleiner als 4; woraus wir folgende drey Auflöſungen erhalten:

I.) $u = 1$ giebt die Zahl der Pferde $x = 9$, und der Ochſen $y = 71$; jene haben gekoſtet 279, dieſe aber 1491, beyde zuſammen alſo 1770 Thaler.

II.) $u = 2$ giebt die Zahl der Pferde $x = 30$, und der Ochſen $y = 40$; jene haben gekoſtet 930, dieſe aber 840, beyde zuſammen alſo 1770 Thaler.

III.) $u = 3$ giebt die Zahl der Pferde $x = 51$, und der Ochſen $y = 9$; jene haben gekoſtet 1581, dieſe aber 189, und beyde zuſammen 1770 Thaler.

§. 219.

Die bisherigen Aufgaben leiten allezeit auf eine ſolche Gleichung, wie $ax + by = c$, wo a, b und c ganze und poſitive Zahlen bedeuten, und für x und y auch ganze und poſitive Zahlen gefordert werden.

Wenn aber b negativ iſt, und die Gleichung eine ſolche Form erhält $ax = by + c$, ſo ſind die Aufgaben von einer ganz andern Art, und laſſen eine unendliche Menge Auflöſungen zu, wovon die Methode noch in dieſem Kapitel erklärt werden ſoll. Die leichteſten Aufgaben von dieſer Art ſind folgendergeſtalt beſchaffen. Wenn man z. B. zwey Zahlen ſucht, deren Differenz 6 ſeyn ſoll, ſo ſetze man die kleinere $= x$, die größere $= y$, und da muß $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$ ſeyn. Hier hindert nun nichts, daß nicht für x alle mögliche ganze Zahlen ſollten

angenommen werden können, und was man immer für eine nimmt, ſo wird y allezeit um 6 größer ſeyn. Nimmt man z. B. $x = 100$, ſo iſt $y = 106$; woraus ganz klar iſt, daß unendlich viel Auflöſungen Statt finden.

§. 220.

Hernach folgen die Aufgaben, wo $c = 0$, und ax ſchlechtweg dem by gleich ſeyn ſoll. Man ſuche nemlich eine Zahl, die ſich ſowohl durch 5, als auch durch 7 theilen läßt, und ſetze die Zahl $= N$, ſo muß erſtlich $N = 5x$ ſeyn, weil die Zahl N durch 5 theilbar ſeyn ſoll; hernach muß auch $N = 7y$ ſeyn, weil ſich dieſe Zahl auch durch 7 theilen läßt; daher bekömmt man $5x = 7y$, und alſo $x = \frac{7y}{5}$. Da ſich nun 7 durch 5 nicht theilen läßt, ſo muß ſich y dadurch theilen laſſen. Man ſetze demnach $y = 5z$, ſo wird $x = 7z$; daher die geſuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede ganze Zahl annehmen kann, alſo daß für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche ſind:

35, 70, 105, 140, 175, 910, ꝛc.

Wollte man, daß ſich die Zahl N noch über dieſes durch 9 theilen ließe, ſo wäre erſtlich $N = 35z$, hernach müßte auch ſeyn $N = 9u$, alſo $35z = 9u$, und $u = \frac{35z}{9}$; woraus klar iſt, daß ſich z durch 9 muß theilen laſſen. Es ſey demnach $z = 9s$, ſo wird $u = 35s$ und die geſuchte Zahl $N = 315s$.

§. 221.

Mehr Schwierigkeiten hat es, wenn die Zahl c nicht 0 iſt, z. B. wenn $5x = 7y + 3$ iſt, welche Gleichung herauskömmt, wenn eine ſolche Zahl N gefunden werden ſoll, welche durch 5 theilbar iſt, mit 7 aber dividirt 3 übrig läßt. Denn in dieſem Falle muß $N = 5x$, hernach aber auch $N = 7y + 3$ ſeyn, und deswegen wird $5x = 7y + 3$; folglich

$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}$. Man ſetze $\frac{2y+3}{5} = z$, ſo wird $2y+3 = 5z$ und $x = y + z$. Da aber $2y+3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, ſo wird $y = \frac{5z-3}{2}$, oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man ſetze nun $z - 3 = 2u$, ſo wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die geſuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle ganze Zahlen angenommen werden können, auch ſogar negative, wofern nur N poſitiv wird, welches hier geſchiehet, wenn $u = -1$; denn da wird $N = 10$. Die folgenden erhält man, wenn man dazu immer 35 addirt; daher die geſuchten Zahlen ſind 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, ꝛc.

§. 222.

Die Auflöſung ſolcher Aufgaben beruhet auf dem Verhältniſſe der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden ſoll, und nach der Beſchaffenheit deſſelben wird die Auflöſung bald kürzer, bald weitläuftiger. Folgende Aufgabe leidet eine kurze Auflöſung; die ſiebente Auflöſung aber erfordert ſchon eine weitläuftigere Rechnung.

VI. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl, welche, durch 6 dividirt, 2, durch 13 aber dividirt, 3 übrig läßt.

Dieſe Zahl ſey N, ſo muß erſtlich $N = 6x + 2$, hernach aber $N = 13y + 3$ ſeyn; alſo wird $6x + 2 = 13y + 3$, und $6x = 13y + 1$; daher $x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}$. Man ſetze alſo $y + 1 = 6z$, ſo wird $y = 6z - 1$, und $x = 2y + z = 13z - 2$. Folglich iſt die geſuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen ſind demnach folgende: 68, 146, 224, 302, 380, ꝛc., welche nach einer arithmetiſchen Progreſſion fortgehen, deren Differenz $78 = 6 \times 13$ iſt. Wenn man alſo nur eine von dieſen Zahlen weiß, ſo laſſen ſich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig

hat, 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu ſubtrahiren, ſo lange es angeht.

§. 223.

VII. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl N, welche durch 39 dividirt, 16, und durch 56 dividirt, 27 übrig läßt.

Erſtlich muß alſo ſeyn $N = 39p + 16$, hernach aber $N = 56q + 27$; daher wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$, und $p = \frac{56q + 11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q + 11}{39} = q + r$, ſo daß $r = \frac{17q + 11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r - 11}{17} = 2r + \frac{5r - 11}{17} = 2r + s$, ſo daß $s = \frac{5r - 11}{17}$, oder $17s = 5r - 11$, und daher $r = \frac{17s + 11}{5} = 3s + \frac{2s + 11}{5} = 3s + t$, ſo daß $t = \frac{2s + 11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$, und alſo $s = \frac{5t - 11}{2} = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + u$, ſo daß $u = \frac{t - 11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden iſt, ſo kann man u nach Belieben annehmen, und daraus erhalten wir rückwärts folgende Beſtimmungen;

$$t = 2u + 11$$
$$s = 2t + u = 5u + 22$$
$$r = 3s + t = 17u + 77$$
$$q = 2r + s = 39u + 176$$
$$p = q + r = 56u + 253,$$

und endlich $N = 39 \times 56u + 9883$. Um die kleinſte Zahl für N zu finden, ſetze man $u = -4$, ſo wird $N = 1147$. Setzt man $u = x - 4$, ſo wird $N = 2184x - 8736 + 9883$, oder $N = 2184x + 1147$.

Dieſe Zahlen machen demnach folgende arithmetiſche Progreſſion aus, deren erſtes Glied 1147, und die Differenz $= 2184$ iſt:

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, 12067 ꝛc.

§. 224.

VIII. Aufgabe. Einer kauft Pferde und Ochſen, zahlt für ein Pferd 31 Thaler, für einen Ochſen aber 20 Thaler, und es findet ſich, daß die Ochſen überhaupt 7 Thaler mehr gekoſtet haben, als die Pferde. Wie viel ſind es Ochſen und Pferde geweſen?

Es ſey die Anzahl der Ochſen $= p$, der Pferde aber $= q$, ſo iſt $20p = 31q + 7$, und

$p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r$, wenn man $\frac{11q+7}{20} = r$ ſetzt; daher $20r = 11q + 7$,

und $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s$; daher

$11s = 9r - 7$ und $r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t$;

alſo $9t = 2s + 7$ und $s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$,

folglich $2u = t - 7$, und daher

$t = 2u + 7$
$s = 4t + u = 9u + 28$
$r = s + t = 11u + 35$
$q = r + s = 20u + 63$ Zahl der Pferde.
$p = p + r = 31u + 98$ Zahl der Ochſen.

Hieraus findet man die kleinſten poſitiven Zahlen für p und q, wenn man ſetzt $u = -3$; die größern ſteigen nach folgenden arithmetiſchen Progreſſionen:

Zahl der Ochſen $p = 5, 36, 67, 98, 129, 160,$ 191, 222, 253, ꝛc.

Zahl der Pferde $q = 3, 23, 43, 63, 83, 103,$ 123, 143, 163, ꝛc.

§. 225.

Wenn wir bey dieſer Aufgabe erwägen, wie die Buchſtaben p und q durch die folgenden beſtimmt werden, ſo iſt leicht einzuſehen, daß ſolches auf dem Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf demjenigen, nach welchem der größte gemeine Theiler dieſer beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:

20 | 31 | 1
   | 20 |

11 | 20 | 1
   | 11 |

9 | 11 | 1
  | 9 |

2 | 9 | 4
  | 8 |

1 | 2 | 2
  | 2 |

0

Denn hier iſt klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Beſtimmung der Buchſtaben p, q, r, s, ꝛc. vorkommen, und mit dem erſten Buchſtaben auf der rechten Hand verbunden ſind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kömmt allererſt die Zahl 7 zum Vorſchein, und zwar mit dem Zeichen +, weil die letzte Beſtimmung die fünfte iſt; wäre hingegen die Zahl derſelben gerade geweſen, ſo hätte −7 geſetzt werden müſſen. Solches wird noch deutlicher durch die folgende Tabelle werden, wo erſtlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Beſtimmung der Buchſtaben p, q, r, ꝛc. vorkömmt.

$31 = 1 \times 20 + 11$	$p = 1 \times q + r$
$20 = 1 \times 11 + 9$	$q = 1 \times r + s$
$11 = 1 \times 9 + 2$	$r = 1 \times s + t$
$9 = 4 \times 2 + 1$	$s = 4 \times t + u$
$2 = 2 \times 1 + 0$	$t = 2 \times u + 7.$

§. 226.

Auf dieſe Art kann auch die Auflöſung der 7ten Aufgabe (§. 223.) vorgeſtellt werden, wie aus folgendem erhellet:

$$\begin{array}{r|l} 56 = 1 \times 39 + 17 & p = 1 \times q + r \\ 39 = 2 \times 17 + 5 & q = 2 \times r + s \\ 17 = 3 \times 5 + 2 & r = 3 \times s + t \\ 5 = 2 \times 2 + 1 & s = 2 \times t + u \\ 2 = 2 \times 1 + 0 & t = 2 \times u + 11. \end{array}$$

§. 227.

Solchergeſtalt ſind wir im Stande, alle dergleichen Aufgaben auf eine allgemeine Art aufzulöſen.

Es ſey nehmlich dieſe Gleichung gegeben: $bp = aq + n$, wo a, b und n bekannte Zahlen ſind. Hier darf man nur eben die Rechnung anſtellen, als wenn man zwiſchen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler ſuchen wollte, aus welchen ſogleich p und q durch die folgenden Buchſtaben beſtimmt werden:

$$\begin{array}{rr|ll} \text{Es ſey} & a = Ab + c & \text{ſo wird} & p = Aq + r \\ & b = Bc + d & & q = Br + s \\ & c = Cd + e & & r = Cs + t \\ & d = De + f & & s = Dt + u \\ & e = Ef + g & & t = Eu + v \\ & f = Fg + 0 & & u = Fv \pm n. \end{array}$$

Hier wird in der letzten Beſtimmung $+n$ genommen, wenn die Anzahl der Beſtimmungen ungerade iſt, hingegen aber $-n$, wenn dieſelbe Zahl gerade iſt. Auf dieſe Art können nun alle dergleichen Aufgaben ziemlich geſchwind aufgelöſet werden, wovon wir einige Beyſpiele geben wollen.

§. 228.

IX. Aufgabe. Es werde eine Zahl geſucht, welche, durch 11 dividirt, 3, durch 19 aber dividirt, 5 übrig läßt.

Dieſe Zahl ſey N, ſo muß erſtlich ſeyn $N = 11p + 3$, hernach auch $N = 19q + 5$; folglich $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird:

$19 = 1 \times 11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1 \times 8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2 \times 3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1 \times 2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2 \times 1 + 0$	$t = 2u + 2.$

Hier kann man u nach Belieben annehmen, und daraus die vorhergehenden Buchſtaben der Ordnung nach rückwärts auf folgende Art beſtimmen:

$$t = 2u + 2$$
$$s = t + u = 3u + 2$$
$$r = 2s + t = 8u + 6$$
$$q = r + s = 11u + 8$$
$$p = q + r = 19u + 14.$$

Hieraus bekömmt man die geſuchte Zahl

$$N = 209u + 157;$$

daher iſt die kleinſte Zahl für $N = 157$.

§. 229.

X. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl N, welche, wie vorher, durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5, durch 29 dividirt aber 10 übrig läßt.

Nach der letzten Bedingung muß $N = 29p + 10$ ſeyn; und da die zwey erſten Bedingungen ſchon berechnet worden, ſo muß zufolge derſelben, wie oben gefunden worden iſt, $N = 209u + 157$ ſeyn, wofür wir ſchreiben wollen $N = 209q + 157$; daher wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Rechnung angeſtellet wird:

$209 = 7 \times 29 + 6$	alſo $p = 7q + r$
$29 = 4 \times 6 + 5$	$q = 4r + s$
$6 = 1 \times 5 + 1$	$r = s + t$
$5 = 5 \times 1 + 0$	$s = 5t - 147.$

Nun wollen wir folgendergeſtalt zurück gehen:

$$s = 5t - 147$$
$$r = s + t = 6t - 147$$
$$q = 4r + s = 29t - 735$$
$$p = 7q + r = 209t - 5292.$$

Folglich $N = 6061t - 153458$. Die kleinſte Zahl kömmt heraus, wenn man ſetzt $t = 26$; alsdenn wird $N = 4128$.

§. 230.

Es iſt aber hier wohl zu merken, daß, wenn eine ſolche Gleichung, wie $bp = aq + n$, aufgelöſt werden ſoll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müſſen; denn ſonſt wäre die Aufgabe unmöglich, wenn nicht die Zahl n eben denſelben gemeinen Theiler hätte.

Sollte z. B. $9p = 15q + 2$ ſeyn, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch ſich 2 nicht theilen läßt, ſo iſt es unmöglich, dieſe Aufgabe aufzulöſen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar iſt, und alſo niemals 2 werden kann. Wäre aber in dieſem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ ꝛc., ſo wäre die Auflöſung wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da denn $3p = 5q + 1$ herauskäme, welche Gleichung nach der obigen Regel leicht aufgelöſet wird. Alſo ſieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müſſen, und daß die gegebene Regel in keinen andern Fällen Statt haben kann.

§. 231.

Um dieſes deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Wege behandeln. Da wird nun $p = \frac{15q + 2}{9} = q + \frac{6q + 2}{9} = q + r$, ſo daß $9r = 6q + 2$, oder $6q = 9r - 2$; daher $q = \frac{9r - 2}{6} = r + \frac{3r - 2}{6} = r + s$, ſo daß $3r - 2 = 6s$,

oder $3r = 6s + 2$ und $r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3}$, welche Formel niemals eine ganze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine ganze Zahl ſeyn muß; wodurch deutlich zu erſehen iſt, daß dergleichen Aufgaben ihrer Natur nach unmöglich ſind.

Zweytes Kapitel.

Von der ſogenannten Regel Coeci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen beſtimmt werden ſollen.

§. 232.

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir geſehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekannte Zahlen beſtimmt werden ſollen, dergeſtalt, daß dafür ganze und poſitive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen gegeben, und die Aufgabe ſoll unbeſtimmt ſeyn, ſo müſſen mehr als zwey unbekannte Zahlen vorkommen. Dergleichen Aufgaben kommen ſchon in den gemeinen Rechenbüchern vor, und pflegen nach der ſogenannten Regel Coeci aufgelöſt zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen, und dieſe Regel durch Beyſpiele erläutern wollen.

§. 233.

I. Aufgabe. Dreyßig Perſonen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren in einem Wirthshauſe 50 Thaler, und zwar zahlt ein Mann 3, ein Weib 2 und ein Kind 1 Thaler. Wie viel Perſonen ſind von jeder Gattung geweſen?

Es ſey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, ſo erhält man die beyden folgenden Gleichungen:

I.) $p + q + r = 30$. II.) $3p + 2q + r = 50$;

aus welchen die drey Buchſtaben p, q und r in ganzen und poſitiven Zahlen beſtimmt werden ſollen. Aus der erſten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner ſeyn, als 30. Dieſer Werth in der andern für r geſchrieben, giebt $2p + q + 30 = 50$; alſo $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von ſelbſt kleiner iſt als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer ſind als 10; woraus folgende Auflöſungen entſpringen:

Zahl der Männer $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$
Zahl der Weiber $q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0.$
Zahl der Kinder $r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.$

Läßt man auch die erſte und letzte Auflöſung weg, weil darinnen 0 vorkömmt, ſo bleiben doch noch 9 wahre Auflöſungen übrig.

§. 234.

II. Aufgabe. Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Thaler. Ein Schwein koſtet $3\frac{1}{2}$, eine Ziege $1\frac{1}{3}$, ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Thaler. Wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine ſey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, ſo hat man folgende zwey Gleichungen: I.) $p + q + r = 100$. II.) $3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$. Multiplicirt man die letztere Gleichung mit 6, um die Brüche wegzubringen, ſo kömmt $21p + 8q + 3r = 600$ heraus. Aus der erſten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern geſetzt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$ giebt. Folglich muß $18p$ durch 5 theilbar ſeyn, oder 5 als einen Factor in ſich ſchließen. Man ſetze alſo $p = 5s$, ſo wird $q = 60 - 18s$ und $r = 13s + 40$, wo für s eine beliebige ganze Zahl genommen werden kann, doch ſo, daß q nicht negativ werde; daher s nicht größer als 3 ange-

nommen werden kann, und alſo, wenn o auch ausgeſchloſſen wird, nur folgende drey Auflöſungen Statt finden:

Nemlich wenn	$s = $	1, 2, 3
ſo wird	$p = $	5, 10, 15
	$q = $	42, 24, 16
	$r = $	53, 66, 79.

§. 235.

Wenn man dergleichen Aufgaben ſelbſt andern zur Auflöſung vorgeben will, ſo iſt vor allen Dingen darauf zu ſehen, daß ſie mögliche Fälle betreffen. Zur Beurtheilung dieſer Möglichkeit dient folgendes.

Wir wollen die beyden bisher betrachteten Gleichungen ſo vorſtellen: I.) $x + y + z = a$, und II.) $fx + gy + hz = b$, wo f, g, h, nebſt a und b gegebene Zahlen ſind. Nun ſey unter den Zahlen f, g und h die erſte f die größte, und h die kleinſte. Da $x + y + z = a$ iſt, ſo wird $fx + fy + fz = fa$. Nun iſt $fx + fy + fz$ größer als $fx + gy + hz$; daher muß fa größer ſeyn, als b, oder b muß kleiner ſeyn, als fa; und da ferner $hx + hy + hz = ha$ und $hx + hy + hz$ gewiß kleiner iſt, als $fx + gy + hz$, ſo muß auch ha kleiner ſeyn als b, oder b größer als ha. Iſt alſo die Zahl b nicht kleiner als fa, und zugleich größer als ha, ſo iſt die Auflöſung der Aufgabe immer unmöglich.

Dieſe Bedingung pflegt man auch ſo auszudrücken: die Zahl b muß zwiſchen dieſen Grenzen fa und ha enthalten ſeyn; ferner muß dieſelbe auch nicht einer der beyden Grenzen gar zu nahe kommen, weil ſonſt die übrigen Buchſtaben nicht beſtimmt werden könnten.

In dem vorigen Beyſpiele, wo $a = 100$, $f = 3\frac{1}{2}$, und $h = \frac{1}{2}$, waren die Grenzen 350 und 50. Wollte man nun ſetzen $b = 51$ anſtatt 100, ſo wären die Gleichungen $x + y + z = 100$, und $3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 51$, und, wenn man mit 6 multiplicirt, $21x + 8y + 3z = 306$.

Man nehme die erſte Gleichung dreymal, ſo wird $3x + 3y + 3z = 300$, und wenn man dieſe von jener abzieht, $18x + 5y = 6$, welches offenbar unmöglich iſt, weil x und y ganze Zahlen ſeyn müſſen.

§. 236.

Dieſe Regel kömmt auch den Münzmeiſtern und Goldſchmieden wohl zu Statten, wenn ſie aus drey oder mehrern Sorten von Metall eine Maſſe von einem gegebenen Gehalte zuſammen ſchmelzen wollen; wie aus folgendem Beyſpiele erhellt.

III. Aufgabe. Ein Münzmeiſter hat dreyerley Silber; das erſte iſt 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun braucht er 30 Mark zwölflöthiges Silber zu einer gewiſſen Arbeit; wie viel Mark muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der erſten Sorte x Mark, von der zweyten y Mark, und von der dritten z Mark, ſo muß $x + y + z = 30$ ſeyn, welches die erſte Gleichung iſt.

Da ferner eine Mark von der erſten Sorte 14 Loth fein Silber hält, ſo werden die x Mark enthalten $14x$ Loth Silber. Eben ſo werden die y Mark von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Mark von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber; daher die ganze Maſſe an Silber betragen wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieſelbe 30 Mark wiegt, wovon eine Mark 12 Loth Silber enthalten ſoll, ſo muß auch dieſe Quantität Silber darinnen ſeyn, nemlich 360 Loth; woraus dieſe zweyte Gleichung entſpringt $14x + 11y + 9z = 360$. Hiervon ſubtrahire man die erſte neunmal genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, ſo bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y beſtimmt werden ſoll, und zwar in ganzen Zahlen; alsdenn aber wird $z = 30 - x - y$. Aus jener Gleichung bekömmt man $2y = 90 - 5x$

und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es ſey demnach $x = 2u$, ſo wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$. Folglich muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 ſeyn, woraus folgende Auflöſungen gezogen werden:

$u =$ 5,	6,	7,	8,	9
$x =$ 10,	12,	14,	16,	18
$y =$ 20,	15,	10,	5,	0
$z =$ 0,	3,	6,	9,	12.

§. 237.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekannte Zahlen vor, wo die Auflöſung auf eben dieſe Art geſchehen kann, wie ſich aus folgendem Beyſpiele erſehen läßt.

IV. Aufgabe. Einer kauft 100 Stück Vieh für 100 Thaler, und zwar einen Ochſen für 10, eine Kuh für 5, ein Kalb für 2, ein Schaaf für $\frac{1}{2}$ Thaler. Wie viel Ochſen, Kühe, Kälber und Schaafe ſind es geweſen?

Die Zahl der Ochſen ſey $= p$, der Kühe $= q$, der Kälber $= r$, und der Schaafe $= s$, ſo iſt die erſte Gleichung: $p + q + r + s = 100$; die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, und wenn man ſie, um den Bruch wegzubringen, mit 2 multiplicirt, $20p + 10q + 4r + s = 200$. Hiervon ſubtrahire man die erſte Gleichung, ſo hat man folgende:

$$19p + 9q + 3r = 100, \text{ und alſo}$$
$$3r = 100 - 19p - 9q,$$
$$\text{und } r = 33 + \tfrac{1}{3} - 6p - \tfrac{1}{3}p - 3q,$$
$$\text{oder } r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3};$$

daher muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar ſeyn. Man ſetze demnach $p - 1 = 3t$, ſo wird

$$\underline{p = 3t + 1} \text{ und } \underline{-3t = 1 - p}, \text{ folglich}$$
$$6p = 18t + 6 \text{ und } -t = \frac{1-p}{3}.$$

Wenn man nun in der vorigen Gleichung $33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3} = r$, anſtatt $6p$ den gleichgeltenden Ausdruck $18t + 6$ und anſtatt $\frac{1-p}{3}$ das ihm gleiche $-t$ ſetzt, ſo erhält man folgende Gleichung: $r = 33 - 18t - 6 - 3q - t = 27 - 19t - 3q$. Und weil $p+q+r+s=100$, ſo iſt $s=100-p-q-r$. Wenn man nun hier anſtatt p den ihm gleichgeltenden Ausdruck $3t+1$, und anſtatt r die Formel $27-19t-3q$ ſetzt, ſo wird $s=72+2q+16t$. Alſo muß $19t+3q$ kleiner ſeyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wenn nur dieſe Bedingung beobachtet wird, daß $19t+3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwägen haben.

I. wenn $t=0$,	II. wenn $t=1$,
ſo wird $p=1$	ſo wird $p=4$
$r=27-3q$	$r=8-3q$
$s=72+2q$	$s=88+2q$.

Im erſten Falle muß q nicht größer ſeyn als 9, und im zweyten Fall muß q nicht größer ſeyn als 2. Mehr Fälle ſind aber nicht möglich, weil t nicht 2, noch viel weniger größer ſeyn kann. Denn wollte man $t=2$ ſetzen, ſo würde $19t+3q=38+3q$, folglich größer als 27, und alſo r negativ werden. Wie könnte man aber unter r eine negative Größe verſtehen, da dieſer Buchſtabe die Anzahl der eingekauften Kälber anzeigt?

Aus beyden Fällen erhalten wir alſo folgende Auflöſungen.

Aus dem erſten Falle nemlich fließen nachſtehende zehn Auflöſungen:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Falle aber nur dieſe drey Auflöſungen:

	I.	II.	III.
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieſes ſind nun in allem 13 Auflöſungen. Wollte man aber 0 nicht gelten laſſen, ſo wären es nur 10 Auflöſungen.

Drittes Kapitel.

Von den zuſammengeſetzten unbeſtimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erſte Poteſtät vorkömmt.

§. 238.

Wir kommen nun zu ſolchen unbeſtimmten Gleichungen, wo zwey unbekannte Zahlen geſucht werden, und die eine nicht, wie bisher, allein ſteht, ſondern entweder mit der andern multiplicirt, oder in einer höhern Poteſtät vorkömmt, wenn nur von der andern blos die erſte Poteſtät vorhanden iſt. Auf eine allgemeine Art haben ſolche Gleichungen folgende Form:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{ꝛc.} = 0,$$

in welcher nur y als die erſte Dignität vorkömmt, und alſo aus dieſer Gleichung leicht beſtimmt werden kann; die Beſtimmung muß aber ſo geſchehen, daß für x und y ganze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und mit den leichtern den Anfang machen.

§. 239.

I. Aufgabe. Man ſuche zwey Zahlen von dieſer Beſchaffenheit, daß, wenn ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, 79 herauskommen.

Es ſeyen die zwey verlangten Zahlen x und y, ſo muß $xy+x+y=79$ ſeyn, woraus wir bekommen $xy+y=79-x$, und $y=\frac{79-x}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1}$. Hieraus erhellet, daß $x+1$ ein Theiler von 80 ſeyn muß. Da nun 80 viele Theiler hat, ſo findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgendem zu ſehen iſt:

Die Theiler ſind	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
Daher wird $x=$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y=$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0.

Weil nun hier die letztern Auflöſungen mit den erſtern übereinkommen, ſo hat man in allem folgende fünf Auflöſungen:

I.	II.	III.	IV.	V.
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9.

§. 240.

Solchergeſtalt kann auch dieſe allgemeine Gleichung aufgelöſt werden: $xy+ax+by=c$, woraus man $xy+by=c-ax$, und alſo $y=\frac{c-ax}{x+b}$ oder $y=-a+\frac{ab+c}{x+b}$ erhält. Daher muß $x+b$ ein Theiler der bekannten Zahl $ab+c$ ſeyn, und alſo kann aus einem jeden Theiler derſelben ein Werth für x gefunden werden. Man ſetze daher, es ſey $ab+c=fg$, ſo daß $y=-a+\frac{fg}{x+b}$. Nun nehme man $x+b=f$, oder $x=f-b$, ſo wird $y=-a+g$ oder $y=g-a$. Auf ſo viel verſchiedene Arten ſich alſo die Zahl $ab+c$ durch zwey Factoren, als fg, vorſtellen läßt, ſo

viel Aufloͤſungen erhaͤlt man. Die erſte iſt nemlich $x = f - b$ und $y = g - a$, die andere aber koͤmmt gleichergeſtalt heraus, wenn man $x + b = g$ ſetzt, da wird $x = g - b$ und $y = f - a$.

Sollte daher dieſe Gleichung gegeben ſeyn: $xy + 2x + 3y = 42$, ſo waͤre $a = 2$, $b = 3$ und $c = 42$; folglich $y = -2 + \frac{48}{x+3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factoren, als fg, vorgeſtellt werden, da denn immer ſeyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$. Dergleichen Factoren in ganzen Zahlen ſind folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factoren	1 × 48		2 × 24		3 × 16		4 × 12		6 × 8	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	−2	46	−1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	−1	21	0	13	1	9	2	5	4

§. 241.

Noch allgemeiner kann die Gleichung ſo vorgeſtellet werden: $mxy = ax + by + c$, wo a, b, c und m gegebene Zahlen ſind, fuͤr x und y aber ganze Zahlen verlangt werden.

Man ſuche daher y, ſo bekoͤmmt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$. Damit hier x aus dem Zaͤhler weggebracht werden koͤnne, ſo multiplicire man beyderſeits mit m, wodurch man erhaͤlt $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zaͤhler dieſes Bruchs iſt nun eine bekannte Zahl, wovon der Nenner ein Theiler ſeyn muß. Man ſtelle daher den Zaͤhler durch zwey Factoren, als fg, vor, welches oͤfters auf vielerley Art geſchehen kann, und ſehe, ob ſich einer davon mit $mx - b$ vergleichen laſſe, ſo daß $mx - b = f$. Hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$, daß $f + b$ ſich durch m theilen laſſe; daher hier nur ſolche Factoren von $mc + ab$ gebraucht werden koͤnnen, die ſich, wenn

dazu b addirt wird, durch m theilen laſſen, welches durch ein Beyſpiel erläutert werden ſoll.

Es ſey alſo $5xy = 2x + 3y + 18$. Hieraus bekömmt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$. Hier müſſen nun von 96 ſolche Theiler geſucht werden, daß, wenn zu denſelben 3 addirt wird, die Summe durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96, nemlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet, daß nur dieſe, nemlich 2, 12, 32, gebraucht werden können. Es ſey alſo

I.) $5x - 3 = 2$, ſo wird $5y = 50$ und daher $x = 1$, und $y = 10$.

II.) $5x - 3 = 12$, ſo wird $5y = 10$ und daher $x = 3$, und $y = 2$.

III.) $5x - 3 = 32$, ſo wird $5y = 5$ und daher $x = 7$, und $y = 1$.

§. 242.

Da hier in der allgemeinen Auflöſung $my - a = \frac{mc + ab}{mx - b}$ wird, ſo iſt dienlich, dieſe Anmerkung zu machen, daß, wenn eine in dieſer Form $mc + ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der auch in dieſer Form $mx - b$ enthalten iſt, alsdenn der Quotient nothwendig dieſe Form $my - a$ haben müſſe, und daß alsdenn die Zahl $mc + ab$ durch ein ſolches Product, $(mx - b)(my - a)$ vorgeſtellt werden könne. Es ſey z. B. $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$, und $c = 15$; ſo bekömmt man $12y - 5 = \frac{215}{12x - 7}$. Nun ſind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die geſucht werden müſſen, welche in der Form $12x - 7$ enthalten ſind, oder, wenn man 7 dazu addirt, daß ſich die Summe durch 12 theilen laſſe, von welchen nur 5 dieſes leiſtet; alſo $12x - 7 = 5$ und $12y - 5 = 43$. Wie nun aus der erſten $x = 1$ wird, ſo findet man auch aus

der andern y in ganzen Zahlen, nemlich $y = 4$. Dieſe Eigenſchaft iſt in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemerket zu werden.

§. 243.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieſer Art betrachten $xy + xx = 2x + 3y + 29$. Hieraus findet man $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$, oder $y = -x - 1 + \frac{26}{x - 3}$. Es muß alſo $x - 3$ ein Theiler von der Zahl 26 ſeyn, und alsdenn wird der Quotient $= y + x + 1$. Nun ſind von 26 die Theiler 1, 2, 13, 26, und alſo erhalten wir folgende Auflöſungen. Iſt nemlich

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, ſo wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$.

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, ſo wird $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$.

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, ſo wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$.

welcher negative Werth wegzulaſſen iſt, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

§. 244.

Mehr Formeln von dieſer Art, wo nur die erſte Poteſtät von y, noch höhere aber von x vorkommen, ſind nicht nöthig, hier zu berechnen, weil dergleichen Fälle ſich nur ſelten ereignen, und alsdenn auch nach der hier erklärten Art aufgelöſet werden können. Wenn aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Poteſtät anſteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln beſtimmen will, ſo kömmt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten, oder einer noch höhern Poteſtät befindlich iſt, und alsdenn kömmt es darauf an, ſol-

che Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierinnen beſtehet die größte Kunſt der unbeſtimmten Analytik, dergleichen Irrationalformeln zur Rationalität zu bringen, wozu in den folgenden Kapiteln einige Anleitung gegeben werden ſoll.

Viertes Kapitel.

Von der Art, dieſe irrationale Formel $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ rational zu machen.

§. 245.

Hier iſt alſo die Frage, was für Werthe von x angenommen werden müſſen, daß dieſe Formel $a+bx+cxx$ ein wirkliches Quadrat werde, und alſo die Quadratwurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchſtaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beſchaffenheit derſelben beruhet hauptſächlich die Beſtimmung der unbekannten Zahl x; doch muß zum voraus bemerkt werden, daß in vielen Fällen die Auflöſung davon unmöglich iſt. Wenn aber dieſelbe möglich iſt, ſo muß man ſich zum wenigſten anfänglich in Beſtimmung des Buchſtabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieſelben ſogar ganze Zahlen ſeyn ſollen, als welches eine ganz beſondere Unterſuchung erfordert.

§. 246.

Wir nehmen hier an, daß dieſe Formel nur bis zur zweyten Poteſtät von x ſteige, indem höhere Poteſtäten beſondere Methoden erfordern.

Sollte nicht einmal die zweyte Poteſtät von x vorkommen, und $c=0$ ſeyn, ſo hätte die Auflöſung gar keine

Schwierigkeit. Denn wenn dieſe Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x ſo beſtimmen ſollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, ſo dürfte man nur ſetzen $a+bx=yy$, woraus man ſogleich erhielte $x=\frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen ſolchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat, und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational herauskäme.

§. 247.

Wir wollen demnach bey dieſer Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo ſolche Werthe für x gefunden werden ſollen, daß, wenn zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in ganzen Zahlen nicht geſchehen kann, indem keine ganze Quadratzahl nur um 1 größer iſt, als die vorhergehende *); daher man ſich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

§. 248.

Weil nun $1+xx$ ein Quadrat ſeyn ſoll, und man ſetzen wollte $1+xx=yy$, ſo würde $xx=yy-1$ und $x=\sqrt{(yy-1)}$. Um alſo x zu finden, müßte man ſolche Zahlen für y ſuchen, daß ihre um 1 verminderte Quadrate wiederum Quadrate würden; welche Auflöſung eben ſo ſchwer, als die vorige, und alſo hier von keinem Nutzen iſt.

Daß es aber wirklich ſolche Brüche gebe, welche für

*) Von der Wahrheit dieſes Satzes kann man ſich auf folgende Art überzeugen. Es bedeute a eine ganze Zahl, ſo wird die nächſt darauf folgende $a+1$ ſeyn. Das Quadrat von $a+1$ iſt a^2+2a+1. Man ziehe hiervon a^2 ab, ſo bleibt $2a+1=a+a+1$ übrig. Hieraus iſt alſo klar, daß der Unterſchied zweyer Quadratzahlen, deren Wurzeln nur um 1 unterſchieden ſind, ſo viel beträgt, als die Summe der beyden Wurzeln.

x geſetzt $1 + xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen erſehen.

I.) Wenn $x = \frac{3}{4}$, ſo wird $1 + xx = \frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{4}$.

II.) Eben dieſes geſchieht, wenn $x = \frac{4}{3}$; denn ſo iſt $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{5}{3}$.

III.) Setzt man $x = \frac{5}{12}$ ſo erhält man $1 + xx = \frac{169}{144}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{13}{12}$ iſt.

Wie alſo dergleichen und ſogar alle mögliche Zahlen gefunden werden ſollen, muß hier gezeigt werden.

§. 249.

Solches kann auf zweyerley Art geſchehen. Nach der erſten Art ſetze man $\sqrt{(1 + xx)} = x + p$, ſo wird $1 + xx = xx + 2px + pp$, wo ſich das Quadrat xx aufhebt, und folglich x ohne Wurzelzeichen beſtimmt werden kann. Denn ſubtrahirt man in der gefundenen Gleichung beyderſeits xx, ſo wird $2px + pp = 1$, und alſo $x = \frac{1 - pp}{2p}$, wo man für p eine jede Zahl, und auch ſogar Brüche annehmen kann.

Man ſetze daher $p = \frac{m}{n}$, ſo wird $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; dieſen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, ſo bekömmt man $x = \frac{nn - mm}{2mn}$.

§. 250.

Damit alſo $1 + xx$ ein Quadrat werde, ſo kann man für m und n nach Belieben alle mögliche ganze Zahlen annehmen, und alſo daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x = \frac{nn - mm}{2mn}$, ſo wird

$1 + xx = 1 + \frac{n^4 - 2n^2m^2 + m^4}{4m^2n^2}$ oder $1 + xx = \frac{n^4 + 2m^2n^2 + m^4}{4m^2n^2}$ welcher Bruch wirklich ein Quadrat iſt, und daraus $\sqrt{(1 + xx)} = \frac{nn + mm}{2mn}$ gefunden wird.

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemerket werden:

Wenn	$n = 2$	3	3	4	4	5	5	5	5
und	$m = 1$	1	2	1	3	1	2	3	4
ſo wird	$x = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

§. 251.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1 + \frac{(nn - mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man dieſe Gleichung mit $(2mn)^2$, ſo wird $(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2$. Wir haben alſo auf eine allgemeine Art zwey Quadrate, deren Summe wieder ein Quadrat iſt. Hierdurch wird nun dieſe Aufgabe aufgelöſt:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl iſt.

Weil man hier m und n nach Belieben annehmen kann, ſo ſey z. B. $n = 6$ und $m = 4$. Es würde alſo $mn = 24$ und $2mn = 48$, folglich $(2mn)^2 + (nn - mm)^2 = (nn + mm)^2$ durch folgende Gleichung ausgedrückt werden können:

$$48^2 + (6^2 - 4^2)^2 = (6^2 + 4^2)^2 \; (36 + 16)^2 = 52^2$$
$$= 48^2 + (36 - 16)^2 = 48^2 + 20^2$$

d. h. die Quadrate der beyden Zahlen 48 und 20 zuſammen addirt, betragen ſo viel als das Quadrat der Zahl 52.

Iſt die allgemeine Gleichung $pp + qq = rr$ gegeben, ſo darf man nur ſetzen $p = 2mn$ und $q = nn - mm$, wodurch man erhält $r = nn + mm$; und da ferner

$(nn+mm)^2-(2mn)^2=(nn-mm)^2$, ſo können wir auch folgende Aufgabe auflöſen:

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadratzahl iſt, ſo daß $pp-qq=rr$. Denn hier darf man nur ſetzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, ſo wird $r=nn-mm$.

Oder man kann auch ſetzen $p=nn+mm$, und $q=nn-mm$, ſo wird alsdenn $r=2mn$.

§. 252.

Wir haben aber zweyerley Arten verſprochen, die Formel $1+xx$ zu einem Quadrate zu machen; dieſe zweyte Art nun iſt folgende.

Man ſetze $\surd(1+xx)=1+\frac{mx}{n}$; daher bekömmt man $1+xx=1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$. Subtrahirt man hier beyderſeits 1, ſo wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, welche Gleichung ſich durch x theilen läßt. Dieſe Theilung giebt $x=\frac{2m}{n}+\frac{mmx}{nn}$, und, wenn man mit nn multiplicirt, $nnx=2mn+mmx$; woraus gefunden wird $x=\frac{2mn}{nn-mm}$. Setzt man dieſen Werth für x, ſo wird $1+xx=1+\frac{4mmnn}{n^4-2mmnn+m^4}$ oder $=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{n^4-2mmnn+m^4}$, welcher Bruch das Quadrat von $\frac{nn+mm}{nn-mm}$ iſt. Da man nun daher dieſe Gleichung bekömmt $1+\frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2}=\frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$, ſo fließt daraus, wie oben, $(nn-mm)^2+(2mn)^2=(nn+mm)^2$, welches die vorigen zwey Quadrate ſind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

§. 253.

Dieſer Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand, die allgemeine Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrate zu machen. Die erſtere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat iſt; die andere aber, wo a ein Quadrat iſt; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

Es ſey demnach erſtlich c eine Quadratzahl, oder die gegebene Formel ſey $a+bx+ffxx$, welche ein Quadrat werden ſoll. Zu dieſem Ende ſetze man $\sqrt{(a+bx+ffxx)}=fx+\frac{m}{n}$, ſo wird das Quadrat $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$, wo ſich $ffxx$ beyderſeits aufhebt, ſo daß $a+bx=\frac{2mfx}{n}+\frac{mm}{nn}$ wird, welche Gleichung, wenn man ſie mit nn multiplicirt, $nna+nnbx=2mnfx+mm$ giebt; woraus gefunden wird $x=\frac{mm-nna}{nnb-2mnf}$. Schreibt man nun dieſen Werth für x, ſo entſteht folgende Gleichung: $\sqrt{(a+bx+ffxx)}=\frac{mmf-nnaf}{nnb-mnf}+\frac{m}{n}=\frac{mnb-mmf-nnaf}{nnb-2mnf}$.

§. 254.

Da für x ein Bruch gefunden worden iſt, ſo ſetze man ſogleich $x=\frac{p}{q}$, ſo daß $p=mm-nna$, und $q=nnb-2mnf$; alsdenn wird die Formel $a+\frac{bq}{q}+\frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat. Folglich bleibt dieſelbe auch ein Quadrat, wenn ſie mit dem Quadrate qq multiplicirt wird; daher auch wieder dieſe Formel $aqq+bqq+ffpp$ ein Quadrat wird, wenn man ſetzt $p=mm-nna$, und $q=nnb-2mnf$; woraus unendlich viel Auflöſungen in ganzen Zahlen gefun-

den werden können, weil man die Buchſtaben m und n nach Belieben annehmen kann.

§. 255.

Der zweyte Fall findet Statt, wenn der Buchſtabe a ein Quadrat iſt. Es ſey demnach dieſe Formel gegeben: $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrate gemacht werden ſoll. Zu dieſem Ende ſetze man $\surd(ff + bx + cxx) = f + \frac{mx}{n}$, ſo wird das Quadrat $ff + bx + cxx = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn}$, wo ſich ff aufhebt, und die übrigen Glieder ſich alle durch x theilen laſſen, ſo daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt, $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder verſetzt $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich

$$x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}.$$

Setzt man nun dieſen Werth für x, ſo wird

$$\surd(ff + bx + cxx) = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm} = \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm}.$$

Setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, ſo kann, wie oben, folgende Formel zu einem Quadrate gemacht werden: $ffqq + bpq + cpp$, als welches geſchiehet, wenn man annimmt $p = 2mnf - nnb$ und $q = nnc - mm$.

§. 256.

Hier iſt beſonders der Fall merkwürdig, wenn $a = 0$, oder wenn dieſe Formel $bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden ſoll. Denn da darf man nur ſetzen $\surd(bx + cxx) = \frac{mx}{n}$, ſo wird $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, und, wenn man durch x dividirt und mit nn multiplicirt, $bnn + cnnx = mmx$; folglich $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$.

Man ſuche z. B. alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen ſind, ſo muß $\frac{xx+x}{2}$, und alſo auch $2xx+2x$, ein Quadrat ſeyn. Daſſelbe ſey nun $\frac{mmxx}{nn}$, ſo wird $2nnx+2nn=mmx$ und $x=\frac{2nn}{mm-2nn}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, für x aber alsdenn gemeiniglich ein Bruch gefunden wird. Doch können auch ganze Zahlen herauskommen. Denn wenn man z. B. ſetzt $m=3$ und $n=2$, ſo bekömmt man $x=8$; wovon das Dreyeck 36 und zugleich ein Quadrat iſt.

Man kann auch ſetzen $m=7$ und $n=5$, ſo wird $x=-50$, wovon das Dreyeck 1225 iſt, welches nicht nur das Dreyeck von $+49$, ſondern auch das Quadrat von 35 iſt. Dieſes wäre auch herausgekommen, wenn man geſetzt hätte $n=7$ und $m=10$; denn da wird $x=49$.

Eben ſo kann man ſetzen $m=17$ und $n=12$; da wird $x=288$, wovon das Dreyeck iſt $\frac{x(x+1)}{2}=\frac{288\times289}{2}=144\times289$, welches eine Quadratzahl iſt, deren Wurzel $=12\times17=204$.

§. 257.

Bey dieſem letzten Falle iſt zu erwägen, daß die Formel $bx+cxx$ aus dieſem Grunde zum Quadrat gemacht worden iſt, weil dieſelbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a+bx+cxx$ ein Quadrat werden kann, wenn weder a noch c ein Quadrat iſt.

Dieſe Fälle finden Statt, wenn ſich $a+bx+cxx$ in zwey Factoren zertheilen läßt, welches geſchiehet, wenn $bb-4ac$ ein Quadrat iſt. Hierbey iſt aber zu merken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man ſetze alſo $a+bx+cxx=0$,

ſo wird $cxx = -bx - a$; folglich $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$ und $x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}$, oder $x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{bb-4ac}}{2c}$; woraus erhellet, daß, wenn $bb - 4ac$ ein Quadrat iſt, dieſe Wurzeln rational angegeben werden können.

Es ſey demnach $bb - 4ac = dd$, ſo ſind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es iſt $x = \frac{-b \pm d}{2c}$; alſo werden von der Formel $a + bx + cxx$ die Diviſores ſeyn: $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt, dieſelbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen. Man findet nemlich $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$. Da nun $dd = bb - 4ac$, ſo hat man nunmehr

$$xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c},$$

woraus man durch die Multiplication mit c erhält $cxx + bx + a$. Man darf alſo nur den einen Factor mit c multipliciren, ſo wird unſere Formel dieſem Producte gleich ſeyn:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) \times \left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{c}\right),$$

und man ſieht, daß dieſe Aufloſung immer Statt findet, ſo oft $bb + 4ac$ ein Quadrat iſt.

§. 258.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unſere Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrate gemacht werden kann; welchen wir alſo zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

Dieſer Fall ereignet ſich nun, wenn unſere Formel durch ein ſolches Product vorgeſtellet werden kann:

$(f + gx) \times (h + kx)$. Um dieſes zu einem Quadrate zu machen, ſo ſetze man die Wurzel davon:

$$\surd\Big((f + gx)(h + kx)\Big) = \frac{m(f+gx)}{n}.$$

Folglich wird $(f+gx) \times (k+kx) = \frac{mm(f+gx)^2}{nn}$, welche Gleichung, durch $f + gx$ dividirt, folgende giebt: $h + kx = \frac{mm(f+gx)}{nn}$, d. i. $hnn + knnx = fmm + gmmx$, und alſo $x = \frac{fmm - hnn}{knn - gmm}$.

§. 259.

Zur Erläuterung kann folgende Aufgabe dienen:

I. Aufgabe. Man ſuche die Zahlen x, welche von der Beſchaffenheit ſind, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrate 2 ſubtrahirt, der Reſt wieder ein Quadrat ſey.

Da nun $2xx - 2$ ein Quadrat ſeyn muß, ſo iſt zu erwägen, daß ſich dieſe Formel durch folgende Factoren vorſtellen läßt: $2(x + 1) \times (x - 1)$. Man ſetze alſo die Wurzel davon $\frac{m(x+1)}{n}$, ſo wird $2(x+1) \times (x-1) = \frac{mm(x+1)^2}{nn}$. Nunmehr dividire man durch $x + 1$, und multiplicire mit nn, ſo bekömmt man $2nnx - 2nn = mmx + mm$, und daher $x = \frac{mm + 2nn}{2nn - mm}$. Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, ſo wird $x = 3$, und $2xx - 2 = 16 = 4^2$. Setzt man $m = 3$ und $n = 2$, ſo wird $x = -17$. Da aber nur das Quadrat von x vorkömmt, ſo iſt es gleich viel, ob man $x = -17$ oder $x = +17$ ſetzt; aus beyden wird $2xx - 2 = 576 = 24^2$.

§. 260.

II. Aufgabe. Es ſey dieſe Formel gegeben:

$6 + 13x + 6xx$, welche zu einem Quadrate gemacht werden ſoll. Hier iſt nun $a = 6$, $b = 13$ und $c = 6$, wo alſo weder a noch c ein Quadrat iſt. Man ſehe daher, ob $bb - 4ac$ ein Quadrat werde. Da nun $bb - 4ac = 169 - 144 = 25 = 5^2$, ſo erhellt hieraus, daß $bb - 4ac$ wirklich ein Quadrat iſt. Die gegebene Formel $6 + 13x + 6x^2$ läßt ſich durch folgende zwey Factoren vorſtellen: $(2 + 3x) \times (3 + 2x)$. Davon ſey nun die Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, ſo bekömmt man $(2 + 3x) \times (3 + 2x) = \frac{mm(2+3x)^2}{nn}$; daraus wird $3nn + 2nnx = 2mm + 3mmx$, und daher $x = \frac{2mm - 3nn}{2nn - 3mm} = \frac{3nn - 2mm}{3mm - 2nn}$. Damit nun der Zähler poſitiv werde, ſo muß $3nn$ größer ſeyn, als $2mm$, und alſo $2mm$ kleiner als $3nn$; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner ſeyn als $\frac{3}{2}$. Damit aber auch der Nenner poſitiv werde, ſo muß $3mm$ größer als $2nn$, und alſo $\frac{mm}{nn}$ größer als $\frac{2}{3}$ ſeyn. Um daher für x poſitive Zahlen zu finden, ſo müſſen für m und n ſolche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner als $\frac{3}{2}$, und doch größer als $\frac{2}{3}$ ſey.

Setzt man nun $m = 6$ und $n = 5$, ſo wird $\frac{mm}{nn} = \frac{36}{25}$, welches kleiner als $\frac{3}{2}$, und offenbar größer als $\frac{2}{3}$ iſt; daher bekömmt man $x = \frac{3}{38}$.

§. 261.

Dieſer dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Statt findet, wenn die Formel $a + bx + cxx$ dergeſtalt in zwey Theile getheilt werden kann, daß der erſte ein Quadrat ſey, der andere aber ſich in zwey Factoren auflöſen laſſe, ſo daß eine ſolche

Form herauskomme: $pp+qr$, wo die Buchſtaben p, q und r Formeln von dieſer Art $f+gx$ bedeuten. Denn da darf man nur ſetzen $\surd(pp+qr)=p+\frac{mq}{n}$, ſo wird $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$, wo pp auf beyden Seiten ſubtrahirt werden kann und die übrigen Glieder durch q ſich theilen laſſen, ſo daß $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$ oder $nnr=2mnp+mmq$, woraus ſich das übrige leicht beſtimmen läßt, und dieſes iſt der vierte Fall, in welchem unſere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Beyſpiele erläutern wollen.

§. 262.

III. Aufgabe. Man ſuche ſolche Zahlen x, die von der Beſchaffenheit ſind, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein andres Quadrat, oder, wenn man davon 1 ſubtrahirt, ein Quadrat übrig bleibe, wie bey der Zahl 5 geſchieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen 50, und $50-1$ ein Quadrat iſt.

Alſo muß $2xx-1$ ein Quadrat ſeyn, wo nach unſerer Formel $a=-1$, $b=0$ und $c=2$, und alſo weder a noch c ein Quadrat iſt; auch läßt ſich dieſelbe nicht in zwey Factoren auflöſen, weil $bb-4ac=8$ kein Quadrat iſt, und daher keiner von den drey erſten Fällen Statt findet.

Nach dem vierten Falle aber kann dieſe Formel ſo vorgeſtellt werden: $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$. Hiervon werde nun die Wurzel $x+\frac{m(x+1)}{n}$ geſetzt, ſo wird man folgende Gleichung erhalten:

$$xx+(x+1)\times(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn},$$

wo man xx auf beyden Seiten abziehen kann und die übrigen Glieder ſich durch $x+1$ theilen laſſen, da denn

$nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$ und $x = \frac{mm + nn}{nn - 2mn - mm}$ herauskömmt; und weil in der Formel $2xx - 1$ nur das Quadrat xx vorkömmt, ſo iſt es gleichviel, ob die Werthe von x poſitiv oder negativ werden. Man kann auch ſogleich $-m$ anſtatt $+m$ ſchreiben, damit man $x = \frac{mm + nn}{nn + 2mn - mm}$ bekomme. Nimmt man hier $m = 1$ und $n = 1$, ſo hat man $x = 1$ und $2xx - 1 = 1$. Es ſey ferner $m = 1$ und $n = 2$, ſo wird $x = \frac{5}{7}$ und $2xx - 1 = \frac{1}{49}$. Setzt man aber $m = 1$ und $n = -2$, ſo wird $x = -5$, oder $x = +5$, und $2xx - 1 = 49$.

§. 263.

Oft geſchieht es auch, daß, wenn ſich weder die erſte, noch zweyte, noch dritte Regel anwenden läßt, man nicht finden kann, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey ſolche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Z. B. wenn dieſe Formel vorkäme $7 + 15x + 13xx$, ſo iſt zwar eine ſolche Zergliederung möglich, fällt aber nicht ſo leicht in die Augen. Denn der erſte Theil iſt $(1 - x)^2$ oder $1 - 2x + xx$, und daher wird der andere ſeyn $6 + 17x + 12xx$, welcher deswegen Factoren hat, weil $17^2 - 4 \times 6 \times 12 = 1$, und alſo ein Quadrat iſt. Die zwey Factoren davon ſind auch wirklich $(2 + 3x)(3 + 4x)$, ſo daß dieſe Formel ſeyn wird $(1 - x)^2 + (2 + 3x)(3 + 4x)$, welche nunmehr nach der vierten Regel aufgelöſt werden kann.

Es iſt aber nicht wohl zu fordern, daß jemand dieſe Zergliederung errathen ſoll; daher wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erſtlich zu erkennen, ob es möglich ſey, eine ſolche Formel aufzulöſen? Denn es giebt unendlich viel dergleichen Formeln, deren Auflöſung ſchlechterdings unmöglich iſt, z. B. $3xx + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrate gemacht werden kann.

Findet ſich aber eine Formel in einem einzigen Falle

möglich, ſo iſt es leicht, alle Auflöſungen derſelben zu finden, welches wir noch hier erörtern wollen.

§. 264.

Der ganze Vortheil, welcher uns in ſolchen Fällen zu ſtatten kommen kann, beſtehet darin, daß man ſuche, ob man keinen Fall finden, oder gleichſam errathen könne, in welchem eine ſolche Formel wie $a + bx + cxx$ ein Quadrat wird, indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach ſetzt, um zu ſehen, ob in keinem Falle ein Quadrat herauskomme.

Weil es auch möglich iſt, daß man durch eine gebrochene, für x geſetzte Zahl ſeine Abſicht erreichen könne, ſo wird es rathſam ſeyn, ſogleich für x einen Bruch z. B. $\frac{t}{u}$ zu ſchreiben, woraus dieſe Formel erwächſt: $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, welche, wenn ſie ein Quadrat iſt, auch mit dem Quadrate uu multiplicirt ein Quadrat bleibt. Man hat alſo nur nöthig zu verſuchen, ob man für t und u ſolche Werthe in ganzen Zahlen errathen könne, daß dieſe Formel $auu + btu + ctt$ ein Quadrat werde; weil alsdenn, wenn man $x = \frac{t}{u}$ ſetzt, auch dieſe Formel $a + bx + cxx$ gewiß ein Quadrat ſeyn wird.

Kann man, aller Mühe ungeachtet, keinen ſolchen Fall finden, ſo hat man großen Grund zu vermuthen, daß es ganz und gar unmöglich ſey, die Formel zu einem Quadrate zu machen.

§. 265.

Hat man aber nur einen Fall errathen, in welchem eine ſolche Formel ein Quadrat iſt, ſo iſt es ganz leicht, alle übrige Fälle zu finden, wo dieſelbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derſelben iſt immer unendlich groß. Um dieſes zu zeigen, ſo wollen wir erſtlich folgende Formel betrachten: $2 + 7xx$, wo $a = 2$, $b = 0$ und $c = 7$ iſt. Dieſelbe wird nun offenbar ein Quadrat,

wenn $x=1$; daher ſetze man $x=1+y$, ſo wird $xx=1+2y+yy$, und unſere Formel wird ſeyn: $9+14y+7yy$, in welcher das erſte Glied ein Quadrat iſt. Setzen wir alſo nach der zweyten Regel die Quadratwurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, ſo bekommen wir folgende Gleichung:

$$9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmy}{nn},$$

und wenn man 9 auf beyden Seiten abzieht,

$$14y+7yy=\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn}.$$

Dividirt man nun durch y und multiplicirt hernach mit nn, ſo erhält man $14nn+7nny=6mn+mmy$, und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7nn-mm}{7nn-mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1$, ſo wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch, weil nur xx vorkömmt, $x=+\frac{1}{3}$; daher $2+7xx=\frac{25}{9}$.

Man ſetze ferner $m=3$ und $n=1$, ſo wird $x=-1$ oder $x=+1$.

Setzt man aber $m=3$ und $n=-1$, ſo wird $x=17$; hieraus erhält man $2+7xx=2025$, welches das Quadrat von 45 iſt.

Laßt uns auch ſetzen $m=8$ und $n=3$, ſo wird $x=-17$, wie zuvor.

Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, ſo wird $x=271$ und $2+7xx=514089=717^2$.

§. 266.

Wir wollen ferner dieſe Formel betrachten: $5xx+3x+7$, welche ein Quadrat wird, wenn $x=-1$. Deswegen ſetze man $x=y-1$, ſo iſt $x^2=(y-1)^2=y^2-2y+1$. Folglich

$$\begin{array}{r} 5xx = 5yy - 10y + 5 \\ 3x = \quad + 3y - 3 \\ 7 = \quad\quad + 7 \\ \hline 5xx + 3x + 7 = 5yy - 7y + 9 \end{array}$$

Setzt man hiervon die Quadratwurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, ſo wird $5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$; daher wir bekommen $5nny - 7nn = -6mn + mmy$, und $y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}$; folglich $x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}$.

Es ſey $m = 2$ und $n = 1$, ſo wird $x = -6$ und alſo $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, ſo wird $x = 18$ und $5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

§. 267.

Endlich wollen wir noch dieſe Formel betrachten: $7xx + 15x + 13$, und ſogleich ſetzen $x = \frac{t}{u}$, ſo daß dieſe Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat ſeyn ſoll. Nun verſuche man für t und u einige kleinere Zahlen auf folgende Art zu ſetzen:

Es ſey $t = 1$ und $u = 1$, ſo wird unſre Formel $= 35$
$t = 2$ und $u = 1$; ; ; $= 71$
$t = 2$ und $u = -1$; ; ; $= 11$
$t = 3$ und $u = 1$; ; ; $= 121$

Da nun 121 ein Quadrat iſt, und alſo der Werth $x = 3$ ein Genüge leiſtet, ſo ſetze man $x = y + 3$, und ſo wird unſere Formel $7yy + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$ oder $7yy + 57y + 121$. Setzt man hiervon die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, ſo bekömmt man

$$7yy + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{mmyy}{nn},$$

oder $7nny + 57nn = 22mn + mmy$, und daher $y = \frac{57nn - 22mn}{mm - 7nn}$ und $x = \frac{36nn - 22mn + 3mm}{mm - 7nn}$.

Man ſetze z. B. $m = 3$ und $n = 1$, ſo wird $x = -\frac{3}{2}$ und unſere Formel $7xx + 15y + 13 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$. Es ſey ferner $m = 1$ und $n = 1$, ſo wird $x = -\frac{17}{6}$. Nimmt man $m = 3$ und $n = -1$ an, ſo wird $x = \frac{129}{2}$ und unſere Formel $7xx + 15x + 13 = \frac{120409}{4} = (\frac{347}{2})^2$.

§. 268.

Bisweilen aber iſt die Mühe umſonſt, einen Fall zu errathen, in welchem die gegebene Formel ein Quadrat wird. Z. B. $3xx + 2$, oder, wenn man anſtatt x den Bruch $\frac{t}{u}$ ſetzt, $3tt + 2uu$, wird niemals ein Quadrat, man mag auch für t und u Zahlen annehmen, welche man will. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weiſe zu einem Quadrate gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth ſeyn, einige Kennzeichen anzugeben, woraus dieſe Unmöglichkeit erkannt werden kann.

Da unſere allgemeine Formel $a + bx + cxx$ aus drey Gliedern beſteht, ſo iſt zu bemerken, daß dieſelbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieſes geſchiehet, wenn man $x = \frac{y - b}{2c}$ ſetzt, wodurch unſere Formel dieſe Geſtalt bekömmt: $a + \frac{by - bb}{2c} + \frac{yy - 2by + bb}{4c}$, oder $\frac{4ac - bb + yy}{4c}$. Soll dieſe Formel ein Quadrat werden, ſo ſetze man dieſelbe $= \frac{zz}{4}$. Hierdurch erhält man $4ac - bb + yy = czz$, folglich $yy = czz + bb - 4ac$. Wenn alſo unſere Formel ein Quadrat ſeyn ſoll, ſo wird auch dieſe $czz + bb - 4ac$ ein Quadrat, und umgekehrt, wenn dieſe ein Quadrat wird, ſo wird auch die

obige ein Quadrat. Folglich wenn man für $bb-4ac$ den Buchſtaben t ſetzt, ſo kömmt es darauf an, ob eine ſolche Formel $czz+t$ ein Quadrat werden könne oder nicht; und da dieſe Formel nur aus zwey Gliedern beſteht, ſo iſt es ohnſtreitig weit leichter, die Möglichkeit und Unmöglichkeit derſelben zu beurtheilen, welches aus der Beſchaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geſchehen muß.

Setzt man $t=0$, ſo iſt offenbar, daß die Formel czz nur alsdenn ein Quadrat werde, wenn die Zahl c ein Quadrat iſt. Denn da ein Quadrat, durch ein anderes Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, ſo kann czz kein Quadrat ſeyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$, d. i. c, ein Quadrat iſt. Alſo wenn die Zahl c kein Quadrat iſt, ſo kann auch die Formel czz auf keinerley Weiſe ein Quadrat werden. Iſt aber c eine Quadratzahl, ſo iſt auch czz ein Quadrat, man mag für z annehmen, was man will.

§. 269.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, ſo müſſen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was im ſechſten Kapitel des erſten Theils von den Eigenſchaften der Zahlen in Anſehung ihrer Theiler gelehrt worden iſt.

So ſind z. B. in Anſehung des Theilers 3 die Zahlen von dreyerley Art; denn einige laſſen ſich genau durch 3 theilen, andere hingegen laſſen, durch 3 dividirt, 1, und noch andre 2 übrig. Wenn man alſo durch n eine jede ganze Zahl verſteht, ſo kann man dieſe drey Arten von Zahlen durch folgende drey Formeln vorſtellen:

I.) $3n$. II.) $3n+1$. III.) $3n+2$.

Da nun alle Zahlen in einer von dieſen drey Formeln enthalten ſind (I. Th. §. 55.), ſo wollen wir die Quadrate davon betrachten.

Iſt die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, ſo iſt

ihr Quadrat $9nn$, welches ſich alſo nicht nur durch 3, ſondern auch ſogar durch 9 theilen läßt.

Iſt die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, ſo iſt ihr Quadrat $9nn + 6n + 1$, welches durch 3 dividirt $3nn + 2n$ giebt, und 1 übrig läßt, und alſo auch zur zweyten Art $3n + 1$ gehöret.

Iſt endlich die Zahl in dieſer Formel $3n + 2$ enthalten, ſo iſt ihr Quadrat $9nn + 12n + 4$, welches durch 3 dividirt, $3nn + 4n + 1$ giebt, und 1 übrig läßt, und alſo gleichfalls zur zweyten Art $3n + 1$ gehöret. Daher iſt klar, daß alle Quadratzahlen, in Anſehung des Theilers 3, nur von zweyerley Arten ſind. Denn ſie laſſen ſich entweder durch 3 theilen, und alsdenn müſſen ſie ſich auch nothwendig durch 9 theilen laſſen; oder wenn ſie ſich nicht durch 3 theilen laſſen, ſo bleibt allezeit nur 1, niemals aber 2 übrig. Daher keine Zahl, die in der Form $3n + 2$ enthalten iſt, ein Quadrat ſeyn kann.

§. 270.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3xx + 2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine ganze Zahl oder einen Bruch ſetzen. Denn iſt x eine ganze Zahl, und theilt man dieſe Formel $3xx + 2$ durch 3, ſo bleibt 2 übrig; daher dieſe Formel kein Quadrat ſeyn kann. Iſt aber x ein Bruch, ſo ſetze man $x = \frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derſelbe ſchon in ſeine kleinſte Form gebracht worden iſt, und alſo t und u keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu} + 2$ ein Quadrat ſeyn, ſo müßte dieſe Formel auch mit uu multiplicirt, d. i. $3tt + 2uu$, ein Quadrat ſeyn, welches aber ebenfalls unmöglich iſt. Denn die Zahl u läßt ſich entweder durch 3 theilen, oder nicht. Läßt ſie ſich dadurch theilen, ſo

läßt ſich t nicht theilen, weil ſonſt t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man ſetze daher $u=3s$, ſo wird unſere Formel $3tt+18ss$, welche durch 3 getheilt $tt+6ss$ giebt. Dieſe letzte Formel aber läßt ſich nicht weiter durch 3 theilen, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil zwar $6ss$ durch 3 theilbar iſt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt ſich aber u nicht durch 3 theilen, ſo ſehe man, was übrig bleibt. Weil ſich das erſte Glied durch 3 theilen läßt, ſo kömmt es mit dem Reſt blos auf das zweyte Glied $2uu$ an. Da aber uu durch 3 dividirt 1 übrig läßt, oder eine Zahl von dieſer Art $3n+1$ iſt; ſo wird $2uu$ eine Zahl von dieſer Art $6u+2$ ſeyn, und alſo durch 3 dividirt 2 übrig laſſen; daher unſere Formel $3tt+2uu$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und alſo gewiß keine Quadratzahl ſeyn kann.

§. 271.

Auf eben die Art läßt ſich auch beweiſen, daß dieſe Formel $3tt+5uu$ niemals ein Quadrat ſeyn kann, und ſogar auch keine von dieſen: $3tt+8uu$; $3tt+11uu$; $3tt+14uu$ ꝛc., wo die Zahlen 3, 8, 11, 14 ꝛc. durch 3 dividirt, 2 übrig laſſen. Denn wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man ſetzte $u=3s$, ſo würde die Formel durch 3, nicht aber durch 9 theilbar ſeyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar, und alſo uu eine Zahl von dieſer Art $3n+1$, ſo wäre zwar das erſte Glied $3tt$ durch 3 theilbar, das andre aber $5uu$ von dieſer Form $15n+5$, oder $8uu$ von dieſer Form, $24n+8$, oder $11uu$ von dieſer, $33n+11$ ꝛc. würde durch 3 dividirt, 2 übrig laſſen, und alſo kein Quadrat ſeyn können. Dieſes gilt auch von dieſer allgemeinen Formel $3tt+(3n+2)uu$, die nimmermehr ein Quadrat werden kann, geſetzt auch, daß man für n negative Zahlen ſetzen wollte. Nimmt man z. B. $n=-1$ an, ſo iſt es unmöglich, dieſe Formel

$3tt - uu$ zu einem Quadrate zu machen. Denn iſt u durch 3 theilbar, ſo iſt die Sache offenbar; wäre aber u nicht durch 3 theilbar, ſo würde uu eine Zahl von dieſer Art $3n + 1$, und alſo unſere Formel $3tt - 3n - 1$ ſeyn, welche durch 3 dividirt, -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man ſetze überhaupt $n = -m$, ſo wird unſere Formel $3tt - (3m - 2)uu$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

§. 272.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen daher auch 4 als einen Theiler betrachten, da denn alle Zahlen in einer von dieſen vier Formeln:

I.) $4n$, II.) $4n + 1$, III.) $4n + 2$, IV.) $4n + 3$,

enthalten ſind (I. Th. §. 56.). Von den Zahlen der erſten Art iſt das Quadrat $16nn$, und läßt ſich alſo durch 16 theilen.

Iſts eine Zahl von der zweyten Art $4n + 1$, ſo iſt ihr Quadrat $16nn + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt, und gehört alſo zu dieſer Formel $8n + 1$.

Iſts eine Zahl von der dritten Art $4n + 2$, ſo iſt das Quadrat $16nn + 16n + 4$, welches durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und alſo in dieſer Form $16n + 4$ enthalten iſt.

Iſts endlich eine Zahl von der vierten Art $4n + 3$, ſo iſt ihr Quadrat $16nn + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

§. 273.

Hieraus lernen wir alſo erſtlich, daß alle gerade Quadratzahlen in dieſer Form $16n$, oder in dieſer $16n + 4$ enthalten ſind; folglich können alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$,

$16n + 10$, $16n + 12$, $16n + 14$ ꝛc. niemals Quadratzahlen ſeyn.

Ferner iſt offenbar, daß alle ungerade Quadratzahlen in dieſer einzigen Formel $8n + 1$ enthalten ſind, oder durch 8 dividirt 1 übrig laſſen. Daher alle übrigen ungerade Zahlen, welche in einer von dieſen Formeln $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$, enthalten ſind, niemals Quadrate werden können.

§. 274.

Aus dieſem Grunde können wir auch wiederum zeigen, daß dieſe Formel $3tt + 2uu$ kein Quadrat ſeyn kann. Denn entweder ſind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine iſt gerade und die andere iſt ungerade, weil beyde zugleich nicht gerade ſeyn können, indem ſonſt 2 ihr gemeiner Theiler ſeyn würde. Wären beyde ungerade, und folglich ſowohl tt als uu in dieſer Form $8n + 1$ enthalten, ſo würde das erſte Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3, das andere Glied aber 2, und beyde zuſammen würden 5 übrig laſſen, und alſo keine Quadrate ſeyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, ſo würde das erſte Glied $3tt$ durch 4 theilbar ſeyn, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig laſſen; alſo beyde zuſammen würden 2 übrig laſſen, und alſo keine Quadrate ſeyn. Wäre aber endlich u gerade, z. B. $u = 2s$, aber t ungerade, und folglich $tt = 8n + 1$, ſo würde unſere Formel ſeyn $24n + 3 + 8ss$, welche, durch 8 dividirt, 3 übrig läßt, und alſo kein Quadrat ſeyn kann.

Eben dieſer Beweis läßt ſich auch auf die Formel $3tt + (8n + 2)uu$, ingleichen auch auf dieſe $(8m + 3)tt + 2uu$, und auch ſogar auf dieſe Formel $(8m + 3)tt + (8n + 2)uu$ ausdehnen, wo für m und n alle ganze Zahlen, ſowohl poſitive als negative, genommen werden können.

§. 275.

Wir gehen ſolchergeſtalt weiter zum Theiler 5, in Anſehung deſſen alle Zahlen in einer von folgenden fünf Formeln enthalten ſind (I. Th. §. 57.):

I.) $5n$. II.) $5n+1$. III.) $5n+2$. IV.) $5n+3$. V.) $5n+4$.

Gehört nun eine Zahl zu der erſten Art, ſo iſt ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5, ſondern auch durch 25 theilbar iſt.

Von einer Zahl der zweyten Art, nemlich von $5n+1$, iſt das Quadrat $25nn+10n+1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt.

Iſt eine Zahl von der dritten Art, ſo iſt ihr Quadrat $25nn+20+4$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Bey einer Zahl der vierten Art iſt das Quadrat $25nn+30n+9$, welches durch 5 dividirt, ebenfalls 4 übrig läßt.

Gehört endlich eine Zahl zu der fünften Art, ſo iſt ihr Quadrat $25nn+40n+16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wenn daher eine Quadratzahl ſich nicht durch 5 theilen läßt, ſo iſt der Reſt immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; daher in dieſen Formeln $5n+2$ und $5n+3$ kein Quadrat enthalten ſeyn kann.

§. 276.

Aus dieſem Grunde können wir auch beweiſen, daß weder die Formel $5tt+2uu$, noch dieſe $5tt+3uu$ ein Quadrat werden könne. Denn u iſt entweder durch 5 theilbar oder nicht; im erſten Falle würden ſich dieſe Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen laſſen, und alſo auch keine Quadrate ſeyn können. Iſt aber u nicht durch 5 theilbar, ſo iſt uu entweder $5n+1$, oder $5n+4$. Im erſten Falle wird die erſte Formel $5tt+10n+2$, welche durch 5 dividirt 2 übrig läßt; die andere aber wird $5tt+15n+3$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt;

daher keine ein Quadrat ſeyn kann. Iſt aber $uu = 5n + 4$, ſo wird die erſte Formel $5tt + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird $5tt + 15n + 12$, welche durch 3 dividirt 2 übrig läßt, und alſo auch in dieſem Falle kein Quadrat werden kann.

Aus eben dieſer Urſache kann auch weder die Formel $3tt + (5n + 2)uu$, noch dieſe $5tt + (5n + 3)uu$ ein Quadrat ſeyn, weil eben dieſelben Reſte, wie vorher, übrig bleiben; man kann auch ſogar im erſten Gliede $5mtt$ anſtatt $5tt$ ſetzen, wenn nur m nicht durch 5 theilbar iſt.

§. 277.

Weil alle gerade Quadrate in der Form $4n$, alle ungerade aber in dieſer Form $4n + 1$ enthalten ſind, und alſo weder $4n + 2$, noch $4n + 3$, ein Quadrat ſeyn kann; ſo folgt daraus, daß dieſe allgemeine Formel $(4m + 3)tt + (4n + 3)uu$ niemals ein Quadrat ſeyn kann. Denn wäre t eine gerade Zahl, ſo würde ſich tt durch 4 theilen laſſen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig laſſen. Wären hingegen beyde Zahlen t und u ungerade, ſo würden die Reſte von tt und uu nur 1, alſo von der ganzen Formel würde 2 der Reſt ſeyn. Nun aber iſt keine Zahl, welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat. Hier iſt auch zu merken, daß ſowohl m als n negativ, und auch $= 0$, genommen werden kann; daher weder die Formel $3tt + 3uu$, noch dieſe $3tt - uu$ ein Quadrat ſeyn kann.

§. 278.

Was wir bey den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate ſeyn können, dieſes gilt auch bey allen andern Theilern, daß ſich immer einige Arten finden, die keine Quadrate ſeyn können.

Es ſey z. B. der Theiler 7, ſo ſind alle Zahlen in einer der folgenden ſieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadrate unterſuchen wollen.

Arten der Zahlen	ihre Quadrate	gehören zu der Art
I) $7n$	$49nn$	$7n$
II) $7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III) $7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV) $7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V) $7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI) $7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII) $7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Da nun die Quadrate, die ſich nicht durch 7 theilen laſſen, in einer von dieſen drey Arten $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$ enthalten ſeyn müſſen; ſo werden die drey übrigen Arten von der Natur der Quadrate gänzlich ausgeſchloſſen. Dieſe Arten ſind nun $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$, und der Grund davon iſt offenbar, weil ſich immer zwey Arten finden, wovon die Quadrate zu einer Gattung gehören.

§. 279.

Um dieſes deutlicher zu zeigen, ſo bemerke man, daß die letzte Art, $7n+6$, auch durch $7n-1$ ausgedrückt werden kann. Denn $7n+6$ und $7n-1$ ſind um 7 von einander unterſchieden. Aus eben dieſer Urſache iſt auch die Formel $7n+5$ mit dieſer $7n-2$ einerley, und $7n+4$ iſt eben ſo viel als $7n-3$. Nun aber iſt offenbar, daß von dieſen zwey Arten der Zahlen $7n+1$ und $7n-1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig laſſen, nemlich 1; eben ſo ſind auch die Quadrate dieſer beyden Arten $7n+2$ und $7n-2$ von einerley Gattung.

§. 280.

Ueberhaupt ſind alſo, wie auch immer der Theiler beſchaffen ſeyn mag, welchen wir mit dem Buchſtaben d andeuten wollen, die daher entſtehenden verſchiedenen Arten der Zahlen folgende:

dn;
$dn + 1$, $dn + 2$, $dn + 3$, $dn + 4$, $dn + 5$, $dn + 6$ ꝛc.
$dn - 1$, $dn - 2$, $dn - 3$, $dn - 4$, $dn - 5$, $dn - 6$ ꝛc.
wo die Quadrate von $dn + 1$ und $dn - 1$ dieſes gemein haben, daß ſie durch d dividirt 1 übrig laſſen, und alſo beyde zu einer Art, nemlich zu $dn + 1$, gehören. Eben ſo verhält es ſich auch mit den beyden Arten $dn + 2$ und $dn - 2$, deren Quadrate zu der Art $dn + 4$ gehören.

Und alſo gilt es überhaupt auch von dieſen zwey Arten $dn + a$ und $dn - a$, deren Quadrate durch d dividirt einerley übrig laſſen, nemlich aa, oder ſo viel als übrig bleibt, wenn man aa durch d theilt.

§. 281.

Auf dieſe Art erhält man alſo eine unendliche Menge ſolcher Formeln, wie $att + buu$, welche auf keinerley Weiſe Quadrate werden können. So erſieht man z. B. aus dem Theiler 7 gar leicht, daß keine von dieſen drey Formeln $7tt + 3uu$, $7tt + 5uu$ und $7tt + 6uu$ jemals ein Quadrat werden kann, weil u, durch 7 dividirt, entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der erſten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig bleibt, welches bey keinem Quadrate geſchehen kann. Wenn nun dergleichen Formeln vorkommen, ſo würde man ſich vergebens bemühen, irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte, und deswegen iſt dieſe Betrachtung von groſſer Wichtigkeit.

§. 282.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx + b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, ſo haben wir geſetzt $x = \frac{t}{u}$, ſo, daß dieſe Formel $att + buu$ zu einem Quadrate gemacht werden ſoll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle, wo ſogar x in ganzen Zahlen gegeben werden kann; wie ſich nun dieſelben ausfindig machen laſſen, ſoll in dem folgenden Kapitel gezeigt werden.

Fünftes Kapitel.

Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird.

§. 283.

Es iſt ſchon oben (§. 268.) die Methode gezeigt worden, die Formel $a + bx + cxx$ ſo zu verwandeln, daß das mittlere Glied wegfalle, und daher begnügen wir uns, die gegenwärtige Abhandlung nur auf dieſe Form $axx + b$ einzuſchränken; wobey es darauf ankömmt, daß für x nur ganze Zahlen gefunden werden, wodurch die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber iſt nöthig, daß eine ſolche Formel an ſich möglich ſey; denn wäre ſie unmöglich, ſo könnten nicht einmal Brüche für x, geſchweige denn ganze Zahlen, Statt finden.

§. 284.

Man ſetze alſo dieſe Formel $axx + b = yy$, da denn beyde Buchſtaben x und y ganze Zahlen ſeyn ſollen, weil a und b dergleichen ſind.

Zu dieſem Ende iſt unumgänglich nöthig, daß man ſchon einen Fall in ganzen Zahlen wiſſe oder errathen habe; denn ſonſt würde alle Mühe überflüſſig ſeyn, mehr dergleichen Fälle zu ſuchen, weil vielleicht die Formel ſelbſt etwas unmögliches enthalten könnte.

Wir wollen demnach annehmen, daß dieſe Formel ein Quadrat werde, wenn man $x = f$ ſetzt, und wollen

das Quadrat durch gg andeuten, ſo daß $aff + b = gg$, wo f und g bekannte Zahlen anzeigen. Es kömmt alſo nur darauf an, wie aus dieſem Falle noch andre Fälle hergeleitet werden können; und dieſe Unterſuchung iſt um ſo viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieſelbe unterworfen iſt, welche wir aber durch folgende Kunſtgriffe überwinden werden.

§. 285.

Da nun ſchon gefunden worden iſt $aff + b = gg$, und überdieſes auch $axx + b = yy$ ſeyn ſoll, ſo ſubtrahire man jene Gleichung von dieſer, wodurch man $axx - aff = yy - gg$ erhält, eine Gleichung, die ſich durch folgende Faktoren ausdrücken läßt:

$$a(x + f)(x - f) = (y + g)(y - g).$$

Man multiplicire beyderſeits mit pq, ſo hat man

$$apq(x + f)(x - f) = pq(y + g)(y - g).$$

Um nun dieſe Gleichheit herauszubringen, mache man folgende Vertheilung:

$$ap(x + f) = q(y + g) \text{ und } q(x - f) = p(y - g).$$

Nunmehr ſuche man aus dieſen beyden Gleichungen die Buchſtaben x und y zu beſtimmen. Die erſte Gleichung, durch q dividirt, giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere, durch p dividirt, giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; dieſe von jener ſubtrahirt giebt $2g = \frac{(app - qq)x + (app + qq)f}{pq}$ und wenn man mit pq multiplicirt, ſo erhält man $2pqg = (app - qq)x + (app + qq)f$, und daher $x = \frac{2gpq}{app - qq} - \frac{(app + qq)f}{app - qq}$. Hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app - qq} - \frac{(app + qq)fq}{(app - qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erſten Glieder den Buchſtaben g, welche zuſammengezogen $\frac{g(app + qq)}{app - qq}$ geben; die beyden

andern enthalten den Buchſtaben f, und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpp}{app-qq}$; daher iſt

$$y=\frac{g(app+qq)-2afpq}{app-qq}.$$

§. 286.

Dieſe Arbeit ſcheinet unſerm Endzwecke gar nicht gemäß zu ſeyn, indem wir hier auf Brüche gerathen ſind, da wir doch für x und y ganze Zahlen finden ſollten, und es würde auf eine neue Unterſuchung ankommen, was man anſtatt p und q für Zahlen annehmen müßte, damit die Brüche wegfallen; welche Frage noch ſchwerer ſcheint, als unſere Hauptfrage. Allein es kann hier ein beſonderer Kunſtgriff angewendet werden, wodurch wir leicht zu unſerm Endzwecke gelangen. Denn da hier alles in ganzen Zahlen ausgedrückt werden ſoll, ſo ſetze man $\frac{app+qq}{app-qq}=m$, und $\frac{2pq}{app-qq}=n$; hierdurch erhält man $x=ng-mf$ und $y=mg-naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben annehmen, ſondern ſie müſſen ſo beſtimmt werden, daß den obigen Beſtimmungen Genüge geſchiehet. Zu dieſem Ende wollen wir ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden

$$mm=\frac{aap^4+2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4} \text{ und } nn=\frac{4ppqq}{aap^4-2appqq+q^4}$$

Folglich iſt $mm-ann=\frac{aap^4+2appqq+q^4-4appqq}{aap^4-2appqq+q^4}$

$$=\frac{aap^4-2appqq+q^4}{aap^4-2appqq+q^4}=1.$$

Hieraus ſieht man, daß die beyden Zahlen m und n ſo beſchaffen ſeyn müſſen, daß $mm=ann+1$. Da nun a eine bekannte Zahl iſt, ſo muß man vor allen Dingen darauf bedacht ſeyn, eine ſolche ganze Zahl für n zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel iſt; und ſobald man eine ſolche gefunden, und über dieſes auch die Zahl f ſo beſtimmt hat,

daß $aff + b$ ein Quadrat wird, nemlich gg, ſo bekömmt man für x und y folgende Werthe in ganzen Zahlen: $x = ng - mf$; und $y = mg - naf$, und dadurch wird $axx + b = yy$.

§. 287.

Iſt einmal m und n gefunden worden, ſo kann man dafür auch $-m$ und $-n$ ſchreiben; weil das Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um daher x und y in ganzen Zahlen zu finden, damit $axx + b = yy$ werde, ſo muß man vor allen Dingen einen ſolchen Fall ſchon haben, daß nemlich $aff + b = gg$ ſey. So bald dieſer Fall bekannt iſt, ſo muß man noch zu der Zahl a ſolche Zahlen m und n ſuchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung gegeben werden ſoll. Iſt nun dieſes geſchehen, ſo hat man ſogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da denn $axx + b = yy$ ſeyn wird.

Setzt man dieſen neuen Fall an die Stelle des vorigen, für bekannt angenommenen Falles, und ſchreibt $ng + mf$, anſtatt f, und $mg + naf$, anſtatt g, ſo bekömmt man für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen ferner, wenn man ſie für f und g ſetzt, andre neue herausgebracht werden, ſo daß man, ſobald man anfänglich nur einen ſolchen Fall gehabt hat, daraus unendlich viel andre ausfindig machen kann.

§. 288.

Die Art, wie wir zu dieſer Auflöſung gelanget ſind, war ziemlich mühſam, und ſchien anfänglich ſich von unſerm Endzwecke zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein beſonderes Glück haben weggeſchafft werden können. Es wird daher nichts überflüſſiges ſeyn, noch einen andern kürzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieſer Auflöſung führet.

§. 289.

Da $axx + b = yy$ ſeyn ſoll, und man ſchon gefunden hat $aff + b = gg$, ſo giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, dieſe aber $b = gg - aff$. Folglich muß auch $yy - axx = gg - aff$ ſeyn; und jetzt kömmt alles darauf an, aus den bekannten Zahlen f und g die unbekannten x und y zu finden; da denn ſogleich in die Augen fällt, daß dieſe Gleichung erhalten werde, wenn man ſetzt $x = f$ und $y = g$. Allein hieraus erhält man keinen neuen Fall, außer demjenigen, der ſchon als bekannt angenommen wird.

Wir wollen demnach ſetzen, man habe für n ſchon eine ſolche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß $ann + 1 = mm$; daher wird nun $mm - ann = 1$. Damit multiplicire man die obige Gleichung $yy - axx = gg - aff$, ſo muß auch ſeyn $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$. Laßt uns zu dieſem Ende ſetzen $y = gm + afn$, ſo bekommen wir: $ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn$, wo ſich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben, und wir alſo $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$ erhalten; welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$. Da dieſe Formel offenbar ein Quadrat iſt, ſo erhalten wir $x = fm + gn$, und alſo eben die Formeln, die wir vorher gefunden haben.

§. 290.

Es wird nun nöthig ſeyn, dieſe Aufloſung durch einige Beyſpiele zu erläutern.

I. Aufgabe. Man ſuche alle ganze Zahlen für x, und zwar von der Beſchaffenheit, daß $2xx - 1$ ein Quadrat werde, oder daß $2xx - 1 = yy$ ſey.

Hier iſt alſo $2xx - 1 = axx + b$, und daher $a = 2$ und $b = -1$. Der erſte Fall, der in die Au-

gen fällt, iſt nun, wenn man $x=1$ und $y=1$ ſetzt. Aus dieſem bekannten Falle haben wir nun $f=1$ und $g=1$. Es wird aber ferner erfordert, eine ſolche Zahl für n zu finden, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, nemlich mm, welches nun geſchieht, wenn $n=2$ und $m=3$ iſt; daher wir aus einem jeden bekannten Falle f und g dieſe neue finden $x=3f+2g$, und $y=3g+4f$. Da nun der erſte bekannte Fall $f=1$ und $g=1$ iſt, ſo finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x=f=1$	5	29	169
$y=g=1$	7	41	239 ꝛc.

§. 291.

II. Aufgabe. Man ſuche alle dreyeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen ſind.

Es ſey z die Dreyeckswurzel, ſo iſt das Dreyeck $\frac{zz+z}{2}$, welches ein Quadrat ſeyn ſoll. Die Wurzel davon ſey x, ſo muß $\frac{zz+z}{2}=xx$ ſeyn. Man multiplicire mit 8, ſo wird $4zz+4z=8xx$, und beyderſeits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Es kömmt alſo darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wenn man ſetzt $8xx+1=yy$, ſo wird $y=2z+1$, und alſo die geſetzte Dreyeckswurzel $x=\frac{y-1}{2}$.

Hier iſt alſo $a=8$, und $b=1$, und der bekannte Fall fällt ſogleich in die Augen, nemlich $f=0$ und $g=1$. Damit nun ferner $8nn+1=mm$ werde, ſo muß $n=1$ und $m=3$ ſeyn; daher bekömmt man $x=3f+g$, und $y=3g+8f$, und $z=\frac{y-1}{2}$. Hieraus erhalten wir alſo folgende Auflöſungen:

$x=f=0$	1	6	35	204	1189	
$y=g=1$	3	17	99	577	3363	
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681	ꝛc.

§. 292.

III. Aufgabe. Man ſuche alle fünfeckige Zahlen, welche zugleich Quadratzahlen ſind.

Die Fünfeckswurzel ſey $=z$, ſo iſt das Fünfeck $=\frac{3zz-z}{2}$, welches dem Quadrate xx gleich ſeyn ſoll; daher wird $3zz-z=2xx$. Man multiplicire mit 12, und addire 1, ſo wird

$$36zz-12z+1=24xx+1=(6z-1)^2.$$

Setzt man nun $24xx+1=yy$, ſo iſt $y=6z-1$ und $z=\frac{y+1}{6}$. Da nun hier $a=24$, und $b=1$, ſo iſt der bekannte Fall $f=0$ und $g=1$; und weil hernach $24nn+1=mm$ ſeyn muß, ſo nehme man $n=1$, ſo wird $m=5$; daher erhalten wir $x=5f+g$ und $y=5g+24f$, und $z=\frac{y+1}{6}$; oder auch $y=1-6z$, ſo wird ebenfalls $z=\frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflöſungen gefunden werden.

$x=f=$	0	1	10	99	980
$y=g=$	1	5	40	485	4801
$z=\frac{y+1}{6}=$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder $z=\frac{1-y}{6}=$	0	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

§. 293.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuſchaffen, wenn eines vorhanden war. Man kann aber auch die erſte gegebene Methode auf ſolche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden iſt, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es ſey demnach die gegebene Formel, die ein Quadrat werden ſoll, dieſe: $axx+bx+c=yy$, und hievon ſey ſchon dieſer Fall bekannt: $aff+bf+c=gg$.

Nun ſubtrahire man dieſe Gleichung von der gegebenen, ſo wird $a(xx - ff) + b(x - f) = yy - gg$, welche durch folgende Faktoren ausgedrückt werden kann: $(x - f)(axx + af + b) = (y - g)(y + g)$. Man multiplicire beyderſeits mit pq, ſo wird $pq(x - f)(axx + af + b) = pq(y - g)(y + g)$, welche Gleichung ſich in dieſe zwey zergliedern läßt: I) $p(x - f) = q(y - g)$; II) $q(ax + af + b) = p(y + g)$; denn wenn man ſie in einander multiplicirt, ſo erhält man jene Gleichung. Nunmehr multiplicire man die erſte mit p, die andere mit q, und ſubtrahire jenes Produkt von dieſem, ſo kömmt $(aqq - pp)x + (aqq + pp)f + bqq = 2gpq$ heraus. Folglich iſt

$$x = \frac{agpq}{aqq - pp} - \frac{(aqq + pp)f}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}.$$

Nach der erſten Gleichung iſt

$$q(y - g) = p(x - f) = p\left(\frac{2gpq}{aqq - pp} - \frac{2afqq}{aqq - pp} - \frac{bqq}{aqq - pp}\right);$$

alſo $y - g = \frac{2gpp}{aqq - pp} - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - pp}$, und daher $y = g\left(\frac{aqq + pp}{aqq - pp}\right) - \frac{2afpq}{aqq - pp} - \frac{bpq}{aqq - qq}$.

Um dieſe Brüche wegzubringen, ſo ſetze man, wie oben (§. 286.) geſchehen iſt, $\frac{aqq + pp}{aqq - pp} = m$ und $\frac{2pq}{app - pp} = n$, ſo wird $m + 1 = \frac{2aqq}{aqq - pp}$, und alſo $\frac{qq}{aqq - pp} = \frac{m + 1}{2a}$. Folglich wird $x = ng - mf - b\frac{(m + 1)}{2a}$ und $y = mg - naf - \frac{1}{2}bn$ ſeyn, wo die Buchſtaben m und n eben ſo beſchaffen ſeyn müſſen, wie oben, nemlich daß $mm = ann + 1$.

§. 294.

Solchergeſtalt ſind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buch-

ſtaben b enthaltenden Glieder Brüche ſind, und alſo unſerm Endzwecke kein Genüge leiſten. Allein es iſt zu merken, daß, wenn man von dieſen Werthen zu den folgenden fortſchreitet, dieſelben immer ganze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Denn man nehme p und q dergeſtalt an, daß $pp = aqq + 1$, ſo fallen, weil $aqq - pp = -1$, die Brüche von ſelbſt weg; und da wird

$x = -2gpq + f(aqq + pp) + bqq$, und

$y = -g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$. Weil aber in dem bekannten Falle $aff + bf + c = gg$ nur das Quadrat gg vorkömmt, ſo iſt es gleichviel, ob man dem Buchſtaben g das Zeichen + oder − giebt. Man ſchreibe alſo $-g$ anſtatt $+g$, ſo werden unſere Formeln ſeyn:

$x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$, und

$y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, da denn gewiß $axx + bx + c = yy$ ſeyn muß.

Man ſuche z. B. diejenigen ſechseckigen Zahlen, welche zugleich Quadrate ſind.

Es muß alſo ſeyn $2xx - x = yy$, wo $a = 2$, $b = -1$, und $c = 0$; der bekannte Fall iſt hier offenbar $x = f = 1$, und $y = g = 1$.

Da hernach $pp = 2qq + 1$ ſeyn muß, ſo wird $q = 2$, und $p = 3$; daher wir erhalten $x = 12g + 17f - 4$ und $y = 17g + 24f - 6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x = f = 1$	25	841	
$y = g = 1$	35	1189	ꝛc.

§. 295.

Wir wollen aber bey der erſtern Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas ſtehen bleiben, und die Fälle in Erwägung ziehen, wo die Formel $axx + b$ ein Quadrat in ganzen Zahlen wird.

Es ſey demnach $axx + b = yy$, und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erſtlich, daß man einen Fall wiſſe, wo dieſes geſchiehet; derſelbe ſey nun $aff + b = gg$.

Zweytens, daß man ſolche Zahlen für m und n wiſſe, daß $mm = ann + 1$, wozu in folgendem Kapitel die Anleitung gegeben werden ſoll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + anf$, aus welchem hernach wiederum neue Fälle gefunden werden können, die wir folgendergeſtalt vorſtellen wollen:

$x = f$	A	B	C	D	E	F
$y = g$	P	Q	R	S	T	V 2c.

wo $A = ng + mf$	$B = nP + mA$	$C = nQ + mB$
und $P = mg + anf$	$Q = mP + anA$	$R = mQ + anB$
ferner $D = nR + mC$	$E = nS + mD$	$F = nT + mE$
und $S = mR + anC$	$T = mS + anD$	$V = mT + anE$ 2c.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe ſo weit fortſetzen kann, als man will.

§. 296.

Nach dieſer Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortſetzen, ohne zugleich die untere zu wiſſen, noch die untere, ohne die obere zu wiſſen. Es läßt ſich aber auch leicht eine Regel angeben, die obere Reihe allein fortzuſetzen, ohne die untere zu wiſſen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt, ohne daß man nöthig hätte, die obere zu wiſſen.

Die Zahlen nemlich, welche für x geſetzt werden können, ſchreiten nach einer gewiſſen Progreſſion fort, wovon man ein jedes Glied, z. B. E, aus den zwey vorhergehenden C und D, beſtimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Denn da $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC)$, d. i. $E = 2mnR + annC + mmC$, ſo wird, weil $nR = D - mC$ hieraus gefunden $E = 2mD - mmC + annC$ oder $E = 2mD - (mm - ann)C$. Da aber

$mm = ann + 1$, alſo $mm - ann = 1$, ſo haben wir $E = 2mD - C$; woraus erhellet, wie eine jede dieſer obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden beſtimmt wird.

Eben ſo verhält es ſich auch mit der untern Reihe. Denn da $T = mS + anD$, und $D = nR + mC$, ſo wird $T = mS + annR + amnC$. Da nun ferner $S = mR + anC$, ſo iſt $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geſchrieben, $T = 2mS - R$ giebt, ſo daß die untere Reihe nach eben der Regel fortſchreitet, wie die obere.

Man ſuche z. B. alle ganze Zahlen x, welche dieſe Eigenſchaft haben, daß $2xx - 1 = yy$. Da iſt nun $f = 1$ und $g = 1$; damit nun ferner $mm = 2nn + 1$ werde, ſo muß $n = 2$ und $m = 3$ ſeyn; und weil $A = ng + mf = 5$, ſo ſind die zwey erſten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieſer Regel gefunden werden, $E = 6D - C$, nemlich ein jedes Glied ſechsmal genommen, weniger dem vorhergehenden, giebt das folgende; daher die für x verlangten Zahlen nach dieſer Regel ſo fortgehen:

1, 5, 29, 169, 985, 5741 ꝛc.

Hieraus ſieht man, daß dieſe Zahlen unendlich weit fortgeſetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten laſſen, ſo würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

Sechſtes Kapitel.

Von einer beſondern Methode, die Formel $ann+1$ zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen.

---

§. 297.

Die in dem vorigen Kapitel gegebenen Vorſchriften können nicht zur Ausführung gebracht werden, wenn man nicht im Stande iſt, für eine jegliche Zahl a, eine ſolche ganze Zahl n zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß man $mm=ann+1$ bekomme.

Wollte man ſich mit gebrochnen Zahlen begnügen, ſo würde dieſe Gleichung leicht aufzulöſen ſeyn, indem man nur ſetzen dürfte $m=1+\frac{np}{q}$. Denn da wird $mm=1+\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq}=ann+1$, und alſo, wenn man 1 auf beyden Seiten der letzten Gleichung abzieht, $\frac{2np}{q}+\frac{nnpp}{qq}=ann$, in welcher Gleichung ſich alle Glieder durch n theilen laſſen. Dividirt man nun mit n und multiplicirt hernach dieſe Gleichung mit qq, ſo erhält man $2pq+npp=anqq$, oder $2pq=anqq-npp=(aqq-pp)n$; folglich $n=\frac{2pq}{aqq-pp}$, woraus unendlich viele Werthe für n gefunden werden können. Weil aber n eine ganze Zahl ſeyn ſoll, ſo hilft uns dieſes nichts; daher zur Erreichung unſerer Abſicht eine ganz andere Methode gebraucht werden muß.

§. 298.

Vor allen Dingen aber iſt zu merken, daß, wenn $ann+1$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden ſoll, ſolches nicht allezeit möglich ſey. Denn erſtlich werden alle

diejenigen Fälle, wo a ſelbſt eine Quadratzahl iſt, ausgeſchloſſen; weil alsdann ann ein Quadrat ſeyn würde, kein Quadrat aber von einem andern Quadrate in ganzen Zahlen um 1 unterſchieden ſeyn kann. Daher muß unſere Formel ſo eingeſchränkt werden, daß der Buchſtabe a weder eine negative noch eine Quadratzahl ſey. So oft aber a eine poſitive Zahl und kein Quadrat iſt, ſo kann allezeit für n eine ſolche ganze Zahl gefunden werden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde.

Hat man nun eine ſolche Zahl gefunden, ſo iſt es leicht, nach dem vorigen Kapitel unendlich viel andere anzugeben. Zu unſerm Vorhaben aber iſt es genug, eine einzige, und zwar die kleinſte ausfindig zu machen.

§. 299.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engländer, mit Namen Pell, eine ganz ſinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieſelbe aber iſt nicht ſo beſchaffen, daß ſie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, ſondern nur für einen jeglichen Fall beſonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach mit den leichtern Fällen den Anfang machen, und für n eine ſolche Zahl ſuchen, daß $2nn + 1$ ein Quadrat, oder daß $\sqrt{(2nn + 1)}$ rational werde.

Hier ſieht man nun leicht, daß dieſe Quadratwurzel größer als n, aber kleiner als $2n$ ſeyn werde. Man ſetze dieſelbe daher $= n + p$, ſo wird p gewiß kleiner ſeyn als n. Alſo haben wir $\sqrt{(2nn + 1)} = n + p$, und daher $2nn + 1 = nn + 2np + pp$; woraus wir itzt n ſuchen wollen. Da nun $nn = 2np + pp - 1$ iſt, ſo wird $n = p + \sqrt{(2pp - 1)}$.

Es kömmt alſo darauf an, daß $2pp - 1$ ein Quadrat werde, welches geſchiehet, wenn $p = 1$ iſt, und hieraus findet man $n = 2$ und $\sqrt{(2nn + 1)} = 3$. Wäre dieſes letztere nicht ſogleich in die Augen gefallen, ſo hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp - 1)}$

größer als p, folglich n größer als $2p$ iſt, ſo ſetze man $n = 2p + q$, wodurch man $2p + q = p + \sqrt{(2pp - 1)}$, oder $p + q = \sqrt{(2pp - 1)}$ erhält, wovon die Quadrate ſind $pp + 2pq + qq = 2pp - 1$ oder $pp = 2pq + qq + 1$; folglich $p = q + \sqrt{(2qq + 1)}$. Es muß alſo $2qq + 1$ ein Quadrat ſeyn, wenn $q = 0$; daher $p = 1$ und $n = 2$. Aus dieſem Beyſpiele kann man ſich ſchon einen Begriff von dieſer Methode machen, welche aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

§. 300.

Es ſey nun $a = 3$, ſo daß die Formel $3nn + 1$ ein Quadrat werden ſoll. Man ſetze $\sqrt{(3nn + 1)} = n + p$, ſo wird $3nn + 1 = nn + 2np + pp$ und $2nn = 2np + pp - 1$; folglich $n = \frac{p + \sqrt{(3pp - 2)}}{2}$. Da nun $\sqrt{(3pp - 2)}$ größer als p, und alſo n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, ſo ſetze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3pp - 2)}$, wovon die Quadrate ſind $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$ oder $2pp = 4pq + 4qq + 2$, d. i. $pp = 2pq + 2qq + 1$; daher $p = q + \sqrt{(3qq + 1)}$. Dieſe Formel iſt der gegebenen gleich, und alſo $q = 0$ leiſtet ein Genüge; daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, alſo $\sqrt{(3nn + 1)} = 2$.

§. 301.

Nun ſey $a = 5$, um die Formel $5nn + 1$ zu einem Quadrate zu machen, wovon die Wurzel größer als $2n$ iſt. Man ſetze alſo $\sqrt{(5nn + 1)} = 2n + p$, ſo wird $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, und $nn = 4np + pp - 1$; daher $n = 2p + \sqrt{(5pp - 1)}$ ſeyn muß. Weil nun $\sqrt{(5pp - 1)}$ größer iſt als $2p$, ſo iſt auch n größer als $4p$; deswegen ſetze man $n = 4p + q$, ſo wird $2p + q = \sqrt{(5pp - 1)}$, oder $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; folglich $pp = 4pq + qq + 1$, und alſo $p = 2q + \sqrt{(5qq + 1)}$.

Dieſer geſchieht ein Genüge, wenn $q=0$, folglich $p=1$ und $n=4$; daher $\sqrt{(5nn+1)}=9$.

§. 302.

Es ſey ferner $a=6$, um $6nn+1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer iſt als $2n$. Man ſetze deswegen $\sqrt{(6nn+1)}=2n+p$, ſo wird $6nn+1=4nn+4np+pp$, oder $2nn=4np+pp-1$, und daher $n=p+\frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ oder $n=\frac{2p+\sqrt{(6pp-2)}}{2}$ alſo n größer als $2p$. Es ſey daher $n=2p+q$, ſo wird $4p+2q=2p+\sqrt{(6pp-2)}$ oder $2p+2q=\sqrt{(6pp-2)}$, oder $2pp=8pq+4qq+2$, d. i. $pp=4pq+2qq+1$, woraus gefunden wird $p=2q+\sqrt{(6qq+1)}$; welche Formel der erſtern gleich iſt, und alſo $q=0$ geſetzt werden kann; woraus folgt, daß $p=1$ und $n=2$, alſo $\sqrt{(6nn+1)}=5$ iſt.

§. 303.

Es ſey weiter $a=7$ und $7nn+1=mm$. Weil nun m größer als $2n$, ſo ſetze man $m=2n+p$; folglich iſt $7nn+1=4nn+4np+pp$ oder $3nn=4np+pp-1$, woraus alſo gefunden wird $n=\frac{2p+\sqrt{(7pp+3)}}{3}$. Da nun n größer als $\frac{4}{3}p$, und alſo größer als p iſt, ſo ſetze man $n=p+q$. Es iſt daher $p+3q=\sqrt{(7pp-3)}$, wovon die Quadrate ſind $pp+6pq+9qq=7pp-3$ oder $6pp=6pq+9qq+3$, oder $2pp=2pq+3qq+1$, und alſo $p=\frac{q+\sqrt{(7qq+2)}}{2}$. Da nun hier n größer als $\frac{3q}{2}$, und alſo größer als q iſt, ſo ſetze man $p=q+r$, wodurch man erhält $q+2r=\sqrt{(7qq+2)}$, wovon die Quadrate ſind $qq+4qr+4rr=7qq+2$, oder $6qq=4qr+4rr-2$ oder $3qq=2qr+2rr-1$; folglich $q=\frac{r+\sqrt{(7rr-3)}}{3}$. Da

nun q größer iſt als r, ſo ſetze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$. Die Quadrate hiervon ſind $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, oder $3rr = 12rs + 9ss + 3$, und $rr = 4rs + 3ss + 1$; alſo $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$. Da nun dieſe Formel der erſtern gleich iſt, ſo ſetze man $s = 0$, wodurch man bekömmt $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$; folglich $m = 8$.

Dieſe Rechnung kann folgendergeſtalt ſehr abgekürzt werden, welches auch in andern Fällen Statt findet.

Da $7nn + 1 = mm$, ſo iſt m kleiner als $3n$. Man ſetze deswegen $m = 3n - p$, ſo wird $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$ oder $2nn = 6np - pp + 1$, und daher $n = \frac{3p - \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$ ſeyn. Weil alſo n kleiner als $3p$ iſt, ſo ſetze man ferner $n = 3p - q$; hierdurch erhält man $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$, und, wenn man quadrirt, $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$, und $pp = 6pq - 2qq + 1$. Hieraus wird $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$. Hier kann man nun ſogleich ſetzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$, wie vorher.

Nehmen wir ferner $a = 8$ an, daß $8nn + 1 = mm$, und daher m kleiner als $3n$ wird, ſo ſetze man $m = 3n - p$, wodurch $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$ wird, woraus man bekömmt $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, welche Formel der erſten ſchon gleich iſt; daher man ſetzen kann $p = 0$, wodurch $n = 1$ und $m = 3$ wird.

§. 304.

Gleichergeſtalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wenn dieſelbe nur poſitiv und kein Quadrat iſt, und man kommt immer endlich zu einem ſolchen Wurzelzeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich iſt, als z. B. zu dieſem Ausdruck $\sqrt{(att + 1)}$, da man denn nur ſetzen darf $t = 0$, als in welchem Falle die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf, wenn man zurück geht, erhält

man einen Werth für n, ſo daß $ann+1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu ſeinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, nach Beſchaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewiſſe Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geſchwind; kömmt man aber bis zu dem Falle, wo $a=13$, ſo wird die Rechnung viel weitläuftiger, und daher wird es gut ſeyn, dieſen Fall hier genauer zu betrachten.

§. 305.

Es ſey demnach $a=13$ und alſo $13nn+1=mm$. Weil nun mm größer als $9nn$, und alſo m größer als $3n$ iſt, ſo ſetze man $m=3n+p$. Nunmehr wird $13nn+1=9nn+6np+pp$, oder $4nn=6np+pp-1$, und folglich $n=\frac{3p+\sqrt{(13pp-4)}}{4}$; daher n größer als $\frac{6}{4}p$, und alſo größer als p iſt. Man ſetze alſo $n=p+q$, ſo wird $p+4q=\sqrt{(13pp-4)}$, und die Quadrate hiervon $13pp-4=pp+8pq+16qq$; daher $12pp=8pq+16qq+4$, oder, durch 4 getheilt, $3pp=2pq+4qq+1$, und alſo $p=\frac{q+\sqrt{(13qq+3)}}{3}$. Hier iſt p größer als $\frac{q+3q}{3}$, alſo größer als q. Man ſetze demnach wieder $p=q+r$, ſo erhält man $2q+3r=\sqrt{(13qq+3)}$. Das Quadrat hiervon iſt $13qq+3=4qq+12qr+9rr$, d. i. $9qq=12qr+9rr-3$, und der dritte Theil hiervon $3qq=4qr+3rr-1$; folglich $q=\frac{2r+\sqrt{(13rr-3)}}{3}$. Hier iſt q größer als $\frac{2r+3r}{3}$, und alſo q größer als r; daher ſetze man $q=r+s$, ſo wird $r+3s=\sqrt{(13rr-3)}$, welche Gleichung quadrirt ſich in folgende verwandelt: $13rr-3=rr+6rs+9ss$, oder $12rr=6rs+9ss+3$; folglich, wenn man erſtlich

durch 3 dividirt, und hernach die Quadratwurzel ſucht, $r = \frac{s+\sqrt{(13ss+1)}}{4}$. Hier iſt r größer als $\frac{s+3s}{4}$ oder s. Man ſetze alſo $r = s + t$, ſo wird $3s+4t=\sqrt{(13ss+4)}$, und die Quadrate hiervon $13ss+4=9ss+24st+16tt$, und alſo $4ss = 24ts + 16tt - 4$, oder, wenn man mit 4 dividirt, $ss=6ts+4tt-1$; folglich $s = 3t+\sqrt{(13tt-1)}$. Alſo iſt s größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen ſetze man $s = 6t + u$, ſo wird $3t+u=\sqrt{(13tt-1)}$, und daher, wenn man die Quadrate nimmt, $13tt-1=9tt+6tu+uu$; folglich $4tt=6tu+uu+1$, und $t=\frac{3u+\sqrt{(13uu+4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$, und alſo größer als u iſt. Man ſetze deswegen $t = u + v$, ſo wird $u+4v=\sqrt{(13uu+4)}$, und die Quadrate hiervon $13uu+4=uu+8uv+16vv$, oder $12uu=8uv+16vv-4$, und daher, wenn man durch 4 dividirt, $3uu=2uv+4vv-1$; folglich $u=\frac{v+\sqrt{(13vv-3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$, und alſo größer als v; deswegen ſetze man $u = v + y$, ſo wird $2v+3x=\sqrt{(13vv-3)}$, und das Quadrat dieſer Gleichung $13vv-3=4vv+12vx+9xx$, oder $9vv=12vx+9xx+3$; folglich, wenn man durch 3 dividirt, $3vv=4vx+3xx+1$, und daher $v=\frac{2x+\sqrt{(13xx+3)}}{3}$, (§. 68.) wo v größer als $\frac{5}{3}x$, und alſo größer als x iſt; deswegen ſetze man $v = x + x$, ſo wird $x+3y=\sqrt{(13xx+3)}$, und, wenn man die Quadrate nimmt, $13xx+3=xx+6xy+9yy$ oder $12xx=6xy+9yy-3$, und, wenn man durch 3 dividirt, $4xx=2xy+3yy-1$, alſo $x=\frac{y+\sqrt{(13yy-4)}}{4}$, (§. 68.) wo x größer iſt als y. Man ſetze daher $x = y + z$, ſo wird $3y+4z=\sqrt{(13yy-4)}$, und die Quadrate hiervon $13yy-4=9yy+24yx+16zz$, oder $4yy=24yz+16zz+4$; folglich, wenn man

durch 4 dividirt, $yy = 6yz + 4zz + 1$, und alſo $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. (§. 68.) Da dieſe Formel endlich der erſten gleich iſt, ſo ſetze man $z = 0$, und da bekömmt man rückwärts gehend folgende Beſtimmungen der angenommenen Größen y, x, v, u ꝛc.

Nemlich wenn $z = 0$

ſo iſt $y = 1$

$x = y + z = 1$

$v = x + y = 2$

$u = v + x = 3$

$t = u + v = 5$

$s = 6t + u = 33$

$r = s + t = 38$

$q = r + s = 71$

$p = q + r = 109$

$n = p + q = 180$

$m = 3n + p = 649$

Alſo iſt 180 nach 0 die kleinſte ganze Zahl für n, daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

§. 306.

Aus dieſem Beyſpiele ſieht man zur Genüge, wie langweilig bisweilen eine ſolche Rechnung werden könne. Denn unter den größeren Zahlen hat man oft nöthig, wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bey der Zahl 13 vorgekommen ſind. Man kann auch nicht wohl voraus ſehen, bey welchen Zahlen ſo große Mühe erfordert wird; daher es dienlich iſt, ſich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen, und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchſtaben m und n vorgeſtellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörigen Buchſtaben m und n hernehmen könne.

§. 307.

Inzwiſchen iſt zu merken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden

werden können; dieſes geſchiehet aber nur bey ſolchen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer ſind als eine Quadratzahl, welches zu zeigen der Mühe werth ſeyn wird.

§. 308.

Es ſey demnach $a = ee - 2$ oder um 2 kleiner, als eine Quadratzahl, und da $(ee - 2)nn + 1 = mm$ ſeyn ſoll, ſo iſt offenbar m kleiner als en; deswegen ſetze man $m = en - p$, ſo wird $(ee - 2)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, oder $2nn = 2enp - pp + 1$, und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, wo es ſogleich in die Augen fällt, daß, wenn man $p = 1$ nimmt, das Wurzelzeichen wegfallen, und $n = e$ und $m = ee - 1$ ſeyn werde.

Wäre z. B. $n = 23$, wo $e = 5$, ſo wird $23nn + 1 = mm$, wenn $n = 5$ und $m = 24$. Dieſes iſt auch an ſich offenbar; denn ſetzt man $n = e$, wenn nemlich $a = ee - 2$, ſo wird $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat von $ee - 1$ iſt.

§. 309.

Es ſey nun auch $a = ee - 1$, nemlich um 1 kleiner, als eine Quadratzahl, ſo daß $(ee - 1)nn + 1 = mm$. Setzt man nun, weil hier wieder m kleiner als en iſt, $m = en - p$, ſo wird $(ee - 1)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$, und folglich $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$, wo das Wurzelzeichen wegfällt, wenn $p = 1$, und daraus bekömmt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieſes iſt auch leicht einzuſehen. Denn da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, ſo wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, welches das Quadrat von $2ee - 1$ iſt. Es ſey z. B. $a = 24$, ſo daß $e = 5$, ſo wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = 49^2$ *).

---

*) Das Wurzelzeichen in dieſem Falle verſchwindet auch, wenn $p = 0$ geſetzt wird; daher wir denn unſtreitig die

§. 310.

Es ſey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadratzahl, ſo daß $(ee + 1)nn + 1 = mm$, wo m augenſcheinlich größer iſt, als en; deswegen ſetze man $m = en + p$, ſo wird $(ee + 1)nn + 1 = eenn + 2enp + pp$, oder $nn = 2enp + pp - 1$, und folglich $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$, wo $p = 1$ genommen werden kann, in welchem Falle $n = 2e$ und $m = 2ee + 1$ wird. Dieſes iſt auch leicht einzuſehen; denn da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, ſo iſt $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$, welches das Quadrat von $2ee + 1$ iſt. Es ſey z. B. $a = 17$, und alſo $e = 4$, ſo wird $17nn + 1 = mm$, wenn $n = 8$ und $m = 33$.

§. 311.

Es ſey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadratzahl, ſo muß $(ee + 2)nn + 1 = mm$ ſeyn, wo m offenbar größer iſt, als en; daher ſetze man $m = en + p$, ſo wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$, oder $2nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp + 2pp - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, ſo wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieſes fällt auch ſogleich in die Augen; denn da $a = ee + 2$ und $n = e$, ſo iſt $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat von $ee + 1$ iſt. Es ſey z. B. $a = 11$, und alſo $e = 3$, ſo wird $11nn + 1 = mm$ ſeyn, wenn $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man ſetzen $a = 83$, ſo iſt $e = 9$, und es wird $83nn + 1 = mm$, wenn man $n = 9$ und $m = 82$ annimmt.

---

kleinſten Zahlen für n und m erhalten, welche ſind $n = 1$ und $m = e$. Iſt alſo $e = 5$, ſo wird die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat, wenn $n = 1$, und die Wurzel dieſes Quadrats $m = e = 5$.

Tabelle,

welche für einen jeglichen Werth von a die kleinſten Zahlen m und n angiebt, ſo daß $mm = ann + 1$

a	n	m	a	n	m
2	2	3	30	2	11
3	1	2	31	273	1520
5	4	9	32	3	17
6	2	5	33	4	23
7	3	8	34	6	35
8	1	3	35	1	6
10	6	19	37	12	73
11	3	10	38	6	37
12	2	7	39	4	25
13	180	649	40	3	19
14	4	15	41	320	2049
15	1	4	42	2	13
17	8	33	43	531	3482
18	4	17	44	30	199
19	39	170	45	24	161
20	2	9	46	3588	24335
21	21	55	47	7	48
22	42	197	48	1	7
23	5	24	50	14	99
24	1	5	51	7	50
26	10	51	52	90	649
27	5	26	53	9100	66251
28	24	127	54	66	485
29	1820	9801	55	12	89

a	n	m	a	n	m
56	2	15	78	6	53
57	20	151	79	9	80
58	2564	19603	80	1	9
59	69	530	82	18	163
60	4	31	83	9	82
61	226153980	1766319049	84	6	55
62	8	63	85	30996	285771
63	1	8	86	1122	10405
65	16	129	87	3	28
66	8	65	88	21	197
67	5967	48842	89	53000	500001
68	4	33	90	2	19
69	936	7775	91	165	1574
70	30	251	92	120	1151
71	413	3480	93	1260	12151
72	2	17	94	221064	2143295
73	267000	2281249	95	4	39
74	430	3699	96	5	49
75	3	26	97	6377352	62809633
76	6630	57799	98	10	99
77	40	351	99	1	10

Siebentes Kapitel.

Von der Art, dieſe Irrationalformel $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen.

---

§. 312.

Wenn Formeln, wo x zu der dritten Poteſtät anſteiget, wie z. B. dieſe $a+bx+cxx+dx^3$, zu Quadraten gemacht, und zu dieſem Ende geſchickte Werthe für x in Rationalzahlen geſucht werden ſollen, ſo iſt dieſes ſchon weit größern Schwierigkeiten unterworfen, und es erfordert ſchon weit mehr Kunſt, nur gebrochene Zahlen für x zu finden; ja man iſt genöthiget, ſich damit zu begnügen, und keine Auflöſung in ganzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus iſt auch hier dieſes zu merken, daß man in dergleichen Fällen keine allgemeine Auflöſung geben kann, ſondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmal zu unendlich viel Auflöſungen leitet.

§. 313.

Was ſchon bey der vorher abgehandelten Formel $a+bx+cxx$ bemerkt worden iſt, daß es unendlich viele Fälle giebt, wo die Auflöſung ſchlechterdings unmöglich iſt, dieſes findet noch weit mehr bey der gegenwärtigen Formel Statt, wo nicht einmal an eine Auflöſung zu gedenken iſt, wofern man nicht ſchon eine weiß oder errathen hat; daher man bloß für dieſe Fälle Regeln zu geben im Stande iſt, durch welche man aus einer ſchon bekannten Auflöſung eine neue ausfindig machen kann, woraus nachgehends auf gleiche Weiſe noch eine andere neue gefunden wird, ſo daß man ſolchergeſtalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwiſchen geſchieht es aber doch öfters, daß, wenn

gleich ſchon eine Auflöſung bekannt iſt, aus derſelben doch keine andere geſchloſſen werden kann, ſo daß in ſolchen Fällen nur eine einzige Statt findet, welcher Umſtand beſonders zu bemerken iſt, weil in dem vorhergehenden Falle aus einer einzigen Auflöſung unendlich viel neue gefunden werden können.

§. 314.

Wenn alſo eine ſolche Formel wie $a+bx+cxx+dx^3$ zu einem Quadrate gemacht werden ſoll, ſo muß nothwendig ſchon ein Fall vorausgeſetzt werden, wo dieſes geſchieht. Ein ſolcher aber fällt am deutlichſten in die Augen, wenn das erſte Glied ſchon ein Quadrat, und die Formel folgendergeſtalt ausgedrückt iſt: $ff+bx+cxx+dx^3$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man ſetzt $x=0$.

Wir wollen daher dieſe Formel zuerſt vornehmen, und ſehen, wie aus dem bekannten Falle $x=0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne. Zu Erreichung dieſer Abſicht aber kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden beſonders hier erklären wollen, und wobey es gut ſeyn wird, mit beſondern Fällen den Anfang zu machen.

§. 315.

Es ſey demnach dieſe Formel $1+2x-xx+x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden ſoll. Da nun hier das erſte Glied 1 ein Quadrat iſt, ſo nehme man die Wurzel von dieſem Quadrate ſo an, daß die beyden erſten Glieder wegfallen. Es ſey alſo die Quadratwurzel $1+x$, wovon das Quadrat unſerer Formel gleich ſeyn ſoll, und da bekommen wir $1+2x-xx+x^3=1+2x+xx$, woraus man, wenn man die beyden erſten Glieder abzieht, folgende Gleichung erhält: $xx=-xx+x^3$, oder $x^3=2xx$, welche durch xx dividirt, ſogleich $x=2$ giebt; woraus unſere Formel $1+4-4+8=9$ wird.

Gleichergeſtalt, wenn die Formel $4+6x-5xx+3x^3$ ein Quadrat werden ſoll, ſo ſetze man erſtlich die Wurzel

$= 2 + nx$, und ſuche n, ſo daß die beyden erſten Glieder wegfallen. Weil nun, wenn man die Wurzel quadrirt, $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx$, ſo muß $4n = 6$ und alſo $n = \frac{3}{2}$ ſeyn; woher dieſe Gleichung entſpringt: $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}xx$; daher $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unſere Formel zu einem Quadrat macht, deſſen Wurzel $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$ ſeyn wird.

§. 316.

Der zweyte Weg beſtehet darin, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hxx$, welche ſo beſchaffen ſind, daß in der Gleichung die drey erſten Glieder wegfallen.

Es ſey z. B. dieſe Formel $1 - 4x + 6xx - 5x^3$ gegeben; hievon ſetze man die Wurzel $1 - 2x + hxx$, da denn $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4$ ſeyn ſoll. Hier fallen die zwey erſten Glieder ſchon weg; damit aber auch das dritte wegfalle, ſo muß $6 = 2h + 4$, und alſo $h = 1$ ſeyn. Hieraus bekommen wir $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, und, wenn durch x dividirt wird, $-5 = -4 + x^3$ und $x = -1$.

§. 317.

Dieſe zwey Methoden können alſo gebraucht werden, wenn das erſte Glied a ein Quadrat iſt. Der Grund derſelben beruhet darauf, daß man bey der erſten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f + px$, wo f die Quadratwurzel des erſten Gliedes iſt, und p alſo angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und alſo nur das dritte und vierte Glied unſerer Formel, nemlich $cxx + dx^3$, mit $ppxx$ verglichen werden muß, da denn die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth für x angiebt, welcher $x = \frac{pp - c}{d}$ ſeyn wird. Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder, und ſetzt dieſelbe $f + px + qxx$, wenn nemlich $a = ff$, und beſtimmt p und q dergeſtalt, daß die drey erſten Glieder bey-

derſeits verſchwinden, welches auf folgende Art geſchie-
het. Da $ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$, ſo muß $b = 2fp$, alſo $p = \frac{b}{2f}$ und $c = 2fq + pp$, alſo $q = \frac{c - pp}{2f}$ ſeyn. Die übrige Gleichung $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$ läßt ſich durch x^3 theilen, und durch dieſe Theilung wird $x = \frac{d - 2pq}{qq}$.

§. 318.

Inzwiſchen kann es öfters geſchehen, daß dennoch dieſe Methode, wenn gleich $a = ff$ iſt, keinen neuen Werth für x angiebt, wie man aus dieſer Formel $ff + dx^3$ erſieht, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Denn ſetzt man, nach der erſten Methode, die Wurzel $= f + px$, damit $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$ werde, ſo muß $0 = 2fp$ und $p = 0$ ſeyn; daher bekömmt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth iſt.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, ſo daß $ff + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$ ſeyn ſoll, ſo muß $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner $0 = 2fq + pp$, und alſo $q = 0$ ſeyn; daher man bekömmt $dx^3 = 0$, und wiederum $x = 0$.

§. 319.

In ſolchen Fällen iſt nun nichts anders zu thun, als daß man ſehe, ob man nicht einen ſolchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man denn aus derſelben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht, wenn gleich das erſte Glied kein Quadrat iſt.

Um dieſes zu zeigen, ſo ſoll die Formel $3 + x^3$ ein Quadrat ſeyn. Da nun ſolches geſchiehet, wenn $x = 1$ iſt, ſo ſetze man $x = 1 + y$, und da bekömmt man

dieſe Formel $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erſte Glied ein Quadrat iſt. Man ſetze alſo nach der erſten Methode die Wurzel davon $2 + py$, ſo wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$, wo nun, um das zweyte Glied wegzuſchaffen, $3 = 4p$, und alſo $p = \frac{3}{4}$ ſeyn muß. Alsdenn wird $3 + y = pp$, und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = - \frac{39}{16}$; folglich $x = - \frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x iſt.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, ſo wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + 4qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo nun, wenn das zweyte Glied wegfallen ſoll, $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$ ſeyn muß; und um das dritte Glied wegzuſchaffen, ſetze man $3 = 4q + pp$, alſo $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{39}{64}$; ſo haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$, oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

§. 320.

Nun wollen wir auch zeigen, wie man, wenn man ſchon einen ſolchen Werth gefunden hat, daraus weiter einen andern neuen finden könne. Dieſes wollen wir auf eine allgemeine Art vorſtellen, und auf dieſe Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher ſchon als bekannt angenommen wird, daß ſie ein Quadrat werde, wenn $x = f$, und daß alsdenn $a + bf + cff + df^3 = gg$ ſey. Hierauf ſetze man $p = f + y$, ſo erhält man dieſe neue Formel:

$$\begin{array}{llll}
a & & & \\
+ bf & + by & & \\
+ cff & + 2cfy & + cyy & \\
+ df^3 & + 3dffy & + 3dfyy & + dy^3 \\
\hline
gg & + (b + 2cf + 3dff)y & + (c + 3df)yy & + dy^3
\end{array}$$

in welcher Formel das erſte Glied ein Quadrat iſt, ſo daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können;

wodurch neue Werthe für y, und alſo auch für x erhalten werden, nemlich $x = f + y$.

§. 321.

Bisweilen hilft es aber doch nichts, wenn man gleich einen Werth für x errathen hat, wie in dieſer Formel geſchieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wenn man ſetzt $x = 2$. Denn ſetzt man dieſem zufolge $x = 2 + y$, ſo kömmt dieſe Formel $9 + 12y + 6yy + y^3$ heraus, welche nun ein Quadrat ſeyn ſoll. Es ſey davon, nach der erſten Regel, die Wurzel $= 3 + py$, ſo wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$, wo $12 = 6p$ und $p = 2$ ſeyn muß; alsdenn wird $6 + y = pp = 4$, und alſo $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werthe nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, ſo wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + 6qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo erſtlich $12 = 6p$ und $p = 2$, ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$, und alſo $q = \frac{1}{3}$ ſeyn muß. Hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; daher $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem wieder nichts weiter geſchloſſen werden kann. Denn wollte man ſetzen $x = -1 + z$, ſo käme dieſe Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erſte Glied wegfällt, und alſo weder die eine noch die andre Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird es ſchon ſehr wahrſcheinlich, daß die Formel $1 + x^3$ kein Quadrat werden könne, außer in dieſen drey Fällen:

I.) $x = 2$, II.) $x = 0$, III.) $x = -1$,

welches aber auch aus andern Gründen bewieſen werden kann.

Achtes Kapitel.

Von der Art, dieſe irrationale Formel $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen.

§. 322.

Hier werden alſo ſolche Werthe für x erfordert, daß dieſe Formel $a+bx+cxx+dx^3$ eine Cubikzahl werde, und daraus die Cubikwurzel gezogen werden könne. Hierbey iſt zu erinnern, daß dieſe Formel die dritte Poteſtät nicht überſchreiten müſſe, weil ſonſt die Auflöſung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Poteſtät gehen, und das Glied dx^3 wegfallen, ſo würde die Auflöſung nicht leichter werden; fielen aber die zwey letzten Glieder weg, ſo daß dieſe Formel $a+bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, ſo hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur ſetzen dürfte $a+bx=p^3$, woraus man ſogleich finden würde $x=\frac{p^3-a}{b}$.

§. 323.

Hier iſt wiederum vor allen Dingen zu merken, daß, wenn weder das erſte noch das letzte Glied ein Cubus iſt, an keine Auflöſung zu gedenken ſey, wofern nicht ſchon ein Fall, wo die Formel ein Quadrat wird, bekannt iſt; derſelbe mag nun ſogleich in die Augen fallen, oder erſt durch Probiren gefunden werden müſſen.

Das erſtere geſchieht nun, 1) wenn das erſte Glied ein Cubus iſt, wie in der Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, wo der bekannte Fall $x=0$ iſt; 2) wenn das letzte Glied ein Cubus und die letzte Formel ſo beſchaffen iſt: $a+bx+cxx+g^3x^3$. Aus dieſen beyden Fällen entſpringt der 3te, wo ſowohl das erſte als letzte Glied ein Cubus iſt, welche drey Fälle wir hier erwägen wollen.

§. 324.

I. Fall. Es ſey die gegebene Formel $f^3 + bx + cxx + dx^3$, welche ein Cubus werden ſoll.

Man ſetze demnach die Wurzel davon $f + px$, ſo daß unſere Formel dem Cubo gleich ſeyn ſoll: $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$. Da nun die erſten Glieder von ſelbſt wegfallen, ſo beſtimme man p dergeſtalt, daß auch die zweyten wegfallen müſſen, welches geſchieht, wenn $b = 3ffp$, oder $p = \frac{b}{3ff}$ wird; alsdenn geben die übrigen Glieder durch xx dividirt dieſe Gleichung: $c + dx = 3fpp + p^3x$; woraus $x = \frac{c - 3fpp}{p^3 - d}$ gefunden wird. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, ſo könnte man die Cubikwurzel ſchlechtweg ſetzen $= f$, da man denn bekommen würde $f^3 = f^3 + bx + cxx$, oder $b + cx = 0$, und daraus $x = -\frac{b}{c}$; woraus aber nichts weiter geſchloſſen werden könnte.

§. 325.

II. Fall. Die gegebene Formel habe nun dieſe Geſtalt: $a + bx + cxx + g^3x^3$. Man ſetze die Cubikwurzel $p + gx$, wovon der Cubus $p^3 + 3gppx + 3ggpxx + g^3x^3$ iſt, da ſich denn die letzten Glieder aufheben. Nun beſtimme man p alſo, daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geſchieht, wenn $c = 3ggp$ oder $p = \frac{c}{3gg}$; alsdenn geben die zwey erſten dieſe Gleichung: $a + bx = p^3 + 3gppx$, woraus gefunden wird $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$. Wäre das erſte Glied a nicht vorhanden geweſen, ſo hätte man die Cubikwurzel auch ſchlechtweg ſetzen können $= gx$, da denn $g^3x^3 = bx + cxx + g^3x^3$, oder $0 = b + cx$; folglich $x = -\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

§. 326.

III. Fall. Es ſey endlich die gegebene Formel $f^3 + bx + cxx + g^3x^3$, worin ſowohl das erſte als auch das letzte Glied ein Cubus iſt; daher man dieſelbe auf beyde vorhergehende Arten behandeln, und alſo zwey Werthe für x heraus bringen kann.

Außer dieſen aber kann man auch noch die Wurzel ſetzen $f + gx$, ſo daß unſere Formel dieſem Cubo gleich werden muß: $f^3 + 3ffgx + 3fggxx + g^3x^3$, da denn die erſten und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt dieſe Gleichung geben: $b + cx = 3ffg + 3fggx$, woraus man erhält: $x = \frac{b - 3ffg}{3fgg - c}$.

§. 327.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von dieſen drey Arten, ſo iſt dabey nichts anders zu thun, als daß man ſucht, einen Werth zu errathen, wo dieſelbe ein Cubus wird. Hat man nun einen ſolchen gefunden, welcher hier $x = h$ ſeyn mag, ſo daß $a + bh + chh + dh^3 = k^3$, ſo ſetze man $x = h + y$, da denn unſere Formel folgende Geſtalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ bh + by \\ chh + 2chy + cyy \\ dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\ \hline k^3 + (b + 2ch + 3dhh)y + (c + 3dh)yy + dy^3 \end{array}$$

welche zu der erſten Art gehört; daher für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachgehends auf gleiche Weiſe noch mehrere gefunden werden können.

§. 328.

Wir wollen nun dieſe Methode durch einige Bey-

ſpiele erläutern, und erſtlich die Formel $1+x+xx$ vornehmen, welche ein Cubus ſeyn ſoll, und zur erſten Art gehöret. Man könnte daher ſogleich die Cubikwurzel $=1$ ſetzen, woraus gefunden würde $x+xx=0$, d. i. $x(1+x)=0$; folglich entweder $x=0$ oder $x=-1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man ſetze daher die Cubikwurzel $1+px$, wovon der Cubus $1+3px+3ppxx+p^3x^3$ iſt, und mache $1=3p$ oder $p=\frac{1}{3}$, ſo geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1=3pp+p^3x$, oder $x=\frac{1-3pp}{p^3}$. Da nun $p=\frac{1}{3}$, ſo wird $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, und daher unſere Formel $1+18+324=343$, wovon die Cubikwurzel $1+px=7$ iſt. Wollte man nun weiter ſetzen $x=18+y$, ſo würde unſere Formel dieſe Geſtalt bekommen: $343+37y+yy$, und hiervon würde nach der erſten Regel die Cubikwurzel $7+py$ zu ſetzen ſeyn, wovon der Cubus $343+147py+21ppyy+p^3y^3$ iſt. Nun ſetze man $37=147p$, oder $p=\frac{37}{147}$, ſo geben die übrigen Glieder dieſe Gleichung $1=21pp+p^3y$; alſo $y=\frac{1-21pp}{p^3}$, d. i. $y=-\frac{340\times121\times147}{37^3}=-\frac{1040580}{50653}$, woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

§. 329.

Es ſey ferner dieſe Formel gegeben $2+xx$, welche ein Cubus werden ſoll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden, wo dieſes geſchieht, und dieſer iſt, wenn $x=5$. Man ſetze demnach ſogleich $x=5+y$, ſo bekömmt man $27+10y+yy$; davon ſey die Cubikwurzel $3+py$, und alſo die Formel ſelbſt dieſem Cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$ gleich. Man mache $10=27p$, oder $p=\frac{10}{27}$, ſo bekömmt man $1=9pp+p^3y$, und daraus $y=\frac{1-9pp}{p^3}$, d. i.

$y = -\frac{19 \times 9 \times 27}{1000}$ oder $y = -\frac{4617}{1000}$, und $x = \frac{383}{1000}$. Hieraus wird unſere Formel $2 + xx = \frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubikwurzel ſeyn muß $3 + py = \frac{129}{100}$.

§. 330.

Man betrachte ferner dieſe Formel $1 + x^3$, ob dieſelbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbaren Fällen, wenn $x = 0$ und $x = -1$. Ob nun gleich dieſe Formel zum dritten Falle gehöret, ſo hilft uns doch die Wurzel $1 + x$ nichts, weil der Cubus davon $1 + 3x + 3xx + x^3$, unſerer Formel gleich geſetzt, $3x + 3xx = 0$ oder $x(1 + x) = 0$ giebt, d. i. entweder $x = 0$ oder $x = -1$.

Will man nun ferner ſetzen $x = -1 + y$, ſo bekommen wir dieſe Formel $3y - 3yy + y^3$, welche ein Cubus ſeyn ſoll, und zum zweyten Falle gehöret. Setzt man daher die Cubikwurzel $p + y$, wovon der Cubus iſt $p^3 + 3ppy + 3pyy + y^3$, und nimmt man $-3 = 3p$ oder $p = -1$ an, ſo geben die übrigen $3y = p^3 + 3ppy = -1 + 3y$; folglich $y = \frac{1}{0}$ d. i. unendlich, woraus alſo nichts gefunden wird. Es iſt auch alle Mühe vergebens, um noch andere Werthe für x zu finden; weil man aus andern Gründen beweiſen kann, daß die Formel $1 + x^3$, außer in den gemeldeten Fällen, niemals ein Cubus werden kann. Denn man hat gezeigt, daß die Summe von zwey Cubis, als $t^3 + x^3$, niemals ein Cubus werden kann; daher iſt dieſes auch in dem Falle $t = 1$ nicht möglich.

§. 331.

Man behauptet auch, daß $2 + x^3$ kein Cubus werden könne, außer in dem Falle, wenn $x = -1$. Dieſe Formel gehört zwar zu dem zweyten Falle, es wird aber durch die daſelbſt gebrauchte Regel nichts heraus gebracht, weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man

hingegen $x = -1 + y$, ſo bekömmt man dieſe Formel $1 + 3y - 3yy + y^3$, welche nach allen drey Fällen behandelt werden kann. Setzt man nach dem erſten die Wurzel $1 + y$, wovon der Cubus $1 + 3y + 3yy + y^3$ iſt, ſo wird $-3yy = 3yy$, welches nur geſchieht, wenn $y = 0$ iſt. Setzt man nach dem zweyten Falle die Wurzel $-1 + y$, wovon der Cubus $-1 + 3y - 3yy + y^3$, ſo wird $1 + 3y = -1 + 3y$ und $y = \frac{2}{0}$, welches unendlich iſt. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel $1 + y$ ſetzen, welches ſchon geſchehen iſt.

§. 332.

Es ſey die Formel $3 + 3x^3$ gegeben, welche ein Cubus werden ſoll. Dieſes geſchieht nun erſtlich in dem Falle, wenn $x = -1$ iſt, woraus aber nichts geſchloſſen werden kann; hernach aber auch in dem Falle, wenn $x = 2$ iſt. Man ſetze deswegen $x = 2 + y$, ſo kömmt dieſe Formel heraus: $27 + 36y + 18yy + 3y^3$, welche zum erſten Falle gehöret. Daher ſey die Wurzel $3 + py$, wovon der Cubus $27 + 27py + 9ppyy + p^3y^3$ iſt. Man mache alſo $36 = 27p$, oder $p = \frac{4}{3}$, ſo geben die übrigen Glieder, durch yy dividirt, $18 + 3y = 9pp + p^3y = 16 + \frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y = -2$; daher $y = -\frac{54}{17}$; folglich $x = -\frac{20}{17}$. Hieraus wird unſere Formel $3 + 3x^3 = -\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubikwurzel $3 + py = \frac{21}{17}$ iſt; und aus dieſem Werthe könnte man, wenn man wollte, noch mehrere finden.

§. 333.

Wir wollen zuletzt noch dieſe Formel betrachten: $4 + xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wenn $x = 2$ und $x = 11$. Setzt man nun erſtlich $x = 2 + y$, ſo muß dieſe Formel $8 + 4y + yy$ ein Cubus ſeyn. Die Wurzel davon ſey $2 + \frac{1}{3}y$, und alſo die Formel $= 8 + 4y + \frac{2}{3}yy + \frac{1}{27}y^3$, woraus man $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{27}y$ erhält; daher $y = 9$, und $x = 11$, welches der andere bekannte Fall iſt.

Setzt man nun ferner $x = 11 + y$, ſo bekömmt man $125 + 22y + yy$, welches dem Cubo von $5 + py$, d. i. $125 + 75py + 15ppyy + p^3y^3$ gleich geſetzt, und $p = \frac{22}{75}$ genommen, $1 = 15pp + p^3y^3$ oder $p^3y^3 = 1 - 15pp = -\frac{109}{375}$ giebt; daher $y = -\frac{122625}{10648}$, und alſo $x = -\frac{5497}{10648}$ iſt.

Weil x ſowohl negativ als poſitiv ſeyn kann, ſo ſetze man $x = \frac{2+2y}{1-y}$. Auf dieſe Art wird unſere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus ſeyn ſoll. Man multiplicirt alſo oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde, ſo bekömmt man die Formel $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo alſo nur noch der Zähler $8 - 8y + 8yy - 8y^3$, oder eben derſelbe durch 8 dividirt, nemlich $1 - y + yy - y^3$, zu einem Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der erſten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$ iſt, ſo wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$; daher $y = \frac{9}{13}$, und $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$; folglich $x = 11$, wie vorher.

Nach der andern Art, wenn man die Wurzel $\frac{1}{3} - y$ ſetzen wollte, findet man eben daſſelbe.

Nach der dritten Art, wenn man die Wurzel $1 - y$ ſetzt, wovon der Cubus $1 - 3y + 3yy - y^3$ iſt, bekömmt man $-1 + y = -3 + 3y$, und alſo $y = 1$; folglich $x = \frac{4}{0}$, d. i. unendlich; daher wird auf dieſe Art nichts neues gefunden.

§. 334.

Weil wir aber dieſe zwey Fälle ſchon wiſſen $x = 2$, und $x = 11$, ſo kann man ſetzen $x = \frac{2+11y}{1 \pm y}$. Denn iſt

$y = 0$, ſo wird $x = 2$; iſt aber y unendlich groß, ſo wird $x = \pm 11$.

Es ſey demnach erſtlich $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, ſo wird unſere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 + 2y + yy}$ oder $\frac{8 + 52y + 125yy}{(1 + y)^2}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zähler, welcher $8 + 60y + 177yy + 125y^3$ seyn wird, zu einem Cubo gemacht werden darf.

Man ſetze demnach erſtlich die Wurzel $= 2 + 5y$; hierdurch würden nicht nur die zwey erſten Glieder, ſondern auch die letzten wegfallen, und alſo nichts gefunden werden.

Man ſetze alſo, nach der zweyten Art, die Wurzel $p + 5y$, wovon der Cubus $p^3 + 15ppy + 75pyy + 125y^3$ iſt, und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, ſo wird $8 + 60y = p^3 + 15ppy$; daher $-\frac{2043}{125}y = \frac{80379}{15625}$ und $y = \frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch ſetzen $x = \frac{2 + 11y}{1 - y}$, ſo wird unſere Formel $4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 - 2y + yy} = \frac{8 + 36y + 125yy}{(1 - y)^2}$, wovon der Zähler mit $1 - y$ multiplicirt ein Cubus wird. Alſo muß auch $8 + 28y + 89yy - 125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier, nach der erſten Art, die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, wovon der Cubus $8 + 28y + \frac{98}{3}yy + \frac{343}{27}y^4$ iſt, ſo wird $89 - 125y = \frac{98}{3} + \frac{343}{27}y$, oder $\frac{3718}{27}y = \frac{169}{3}$ und alſo $y = \frac{1521}{3718} = \frac{9}{22}$; folglich $x = 11$, welches der ſchon bekannte Fall iſt.

Setzt man ferner, nach der dritten Art, die Wurzel $2 - 5y$, wovon der Cubus $8 - 60y + 150yy - 125y^3$ iſt, ſo erhalten wir $28 + 89y = -60 + 150y$; folglich $y = \frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1090}{27}$, und unſere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus von $\frac{106}{9}$ iſt.

§. 335.

Endlich iſt noch zu erinnern, daß es einige Formeln giebt, welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können. Denn wenn z. B. cxx ein Cubus ſeyn ſoll, ſo ſetze man die Wurzel davon $= px$, und da wird $cxx = p^3x^3$ oder $c = p^3x$; daher $x = \frac{c}{p^3}$. Man ſchreibe $\frac{1}{q}$ anſtatt p, ſo wird $x = cq^3$.

Der Grund hiervon iſt offenbar, weil die Formel ein Quadrat enthält; daher auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $abb + 2abcx + accxx$ ganz leicht zu einem Cubo gemacht werden können. Denn man ſetze die Cubikwurzel davon $= \frac{b+cx}{q}$, ſo wird $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt $a = \frac{b+cx}{q^3}$ giebt; folglich $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, wo man q nach Belieben beſtimmen kann.

Hieraus erhellet, wie höchſt nützlich es ſey, die gegebene Formel in ihre Faktores aufzulöſen, ſo oft ſolches geſchehen kann, und von dieſer Materie ſoll in dem folgenden Kapitel ausführlich gehandelt werden.

Neuntes Kapitel.

Von der Auflöſung dieſer Formel $axx + bxy + cyy$ in Faktoren.

---

§. 336.

Hier bedeuten die Buchſtaben x und y nur allein ganze Zahlen, und wir haben auch aus dem Bisherigen, wo man ſich mit Brüchen begnügen mußte, geſehen, wie die Aufgabe immer auf ganze Zahlen gebracht werden kann. Denn iſt z. B. die geſuchte Zahl x ein Bruch, ſo darf man nur ſetzen $x = \frac{t}{u}$, da denn für t und u immer ganze Zahlen angegeben werden können; und weil dieſer Bruch in der kleinſten Form ausgedrückt werden kann, ſo können die beyden Buchſtaben t und u als ſolche angeſehen werden, die unter ſich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel ſind alſo x und y nur ganze Zahlen, und ehe wir zeigen können, wie dieſelbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höhern Poteſtät erhoben werden ſoll, ſo iſt nöthig zu unterſuchen, was man den Buchſtaben x und y für Werthe geben müſſe, daß dieſe Formel zwey oder mehr Faktores erhalte.

§. 337.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor. Der erſte iſt, wenn ſich dieſe Formel wirklich in zwey rationale Faktores auflöſen läßt, welches geſchieht, wie wir ſchon oben geſehen haben, wenn $bb - 4ac$ eine Quadratzahl wird.

Der zweyte Fall iſt, wenn dieſe beyden Faktores einander gleich werden, in welchem die Formel ſelbſt ein wirkliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall iſt, wenn ſich dieſelbe nicht anders als in irrationale Faktores auflöſen läßt, dieſelben mö-

gen ſchlechtweg irrational oder gar imaginär ſeyn. Jenes geſchieht, wenn $bb - 4ac$ eine poſitive Zahl, aber kein Quadrat iſt, dieſes hingegen, wenn $bb - 4ac$ negativ wird. Dieſes ſind nun die drey Fälle, welche wir hier zu erwägen haben.

§. 338.

Läßt ſich unſere Formel in zwey rationale Faktoren auflöſen, ſo kann dieſelbe auf folgende Art vorgeſtellt werden: $(fx + gy)(hx + ky)$, welche alſo ſchon ihrer Natur nach zwey Faktores in ſich ſchließt. Will man aber, daß dieſelbe auf eine allgemeine Art mehr Faktores in ſich ſchließe, ſo darf man nur ſetzen $fx + gy = pq$ und $hx + ky = rs$, da denn unſere Formel dem Produkt $pqrs$ gleich wird, und alſo vier Faktores in ſich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehrt werden könnte. Hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth, nemlich $x = \frac{pq - gy}{f}$ und $x = \frac{rs - ky}{h}$, woraus $hpq - hgy = frs - fky$ gefunden wird, und alſo $y = \frac{frs - hqp}{fk - hg}$ und $x = \frac{kpq - grs}{fk - hg}$. Damit nun x und y in ganzen Zahlen ausgedrückt werde, ſo müſſen die Buchſtaben p, q, r, s ſo genommen werden, daß ſich der Zähler durch den Nenner wirklich theilen laſſe, welches geſchieht, wenn ſich entweder p und r, oder q und s dadurch theilen laſſen.

§. 339.

Um dieſes zu erläutern, ſo ſey die Formel $xx - yy$ gegeben, welche aus den Faktoren $(x + y)(x - y)$ beſteht. Soll dieſelbe nun noch mehr Faktoren haben, ſo ſetze man $x + y = pq$ und $x - y = rs$; hierdurch bekömmt man $x = \frac{pq + rs}{2}$ und $y = \frac{pq - rs}{2}$. Damit nun dieſe Zahlen ganze werden, ſo müſſen die beyden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerade, oder beyde ungerade ſeyn.

Es ſey z. B. $p=7$, $q=5$, $r=3$ und $s=1$, ſo wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$; daher entſpringt $xx-yy=105$, welche Zahl wirklich aus den Faktoren $7\times5\times3\times1$ beſteht; alſo hat dieſer Fall nicht die geringſte Schwierigkeit.

§. 340.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Faktores in ſich ſchließt und daher ſo vorgeſtellt werden kann: $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Faktoren haben kann, als welche aus der Wurzel $fx+gy$ entſpringen. Setzt man alſo $fx+gy=pqr$, ſo wird unſere Formel $ppqqrr$, und kann alſo ſo viel Faktoren haben, als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine beſtimmt, und die andere unſerem Belieben frey geſtellt. Denn man bekömmt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo y leicht ſo angenommen werden kann, daß der Bruch wegfällt. Die leichteſte Formel von dieſer Art iſt xx. Setzt man $x=pqr$, ſo ſchließt das Quadrat xx drey quadratiſche Faktoren in ſich, nemlich pp, qq und rr.

§. 341.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo ſich unſere Formel nicht in zwey rationale Faktoren auflöſen läßt, und da erfordert es beſondere Kunſtgriffe, für x und y ſolche Werthe zu finden, daß die Formel zwey oder mehr Faktoren in ſich enthalte. Um dieſe Unterſuchung zu erleichtern, ſo iſt zu merken, daß unſere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet. Man darf nemlich nur ſetzen $x=\frac{z-by}{2a}$, da denn folgende Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}$$

Wir wollen daher ſogleich das mittlere Glied weglaſſen, und dieſe Formel betrachten: $axx + cyy$, wobey es darauf ankömmt, was man den Buchſtaben x und y für Werthe beylegen ſoll, damit dieſe Formel Faktores erhalte. Es iſt leicht zu erachten, daß ſolches von der Natur der Zahlen a und c abhängt, und deswegen wollen wir mit einigen beſtimmten Formeln dieſer Art den Anfang machen.

§. 342.

Es ſey alſo erſtlich dieſe Formel gegeben $xx + yy$, welche alle Zahlen in ſich begreift, die eine Summe von zwey Quadraten ſind, und wovon wir die kleinſten Zahlen von 1 bis 50 hier vorſtellen wollen:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen ſich einige Primzahlen befinden, die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchſtaben x und y für Werthe geben müſſe, da die Formel $xx + yy$ Theiler oder Faktores habe, und zwar ſo viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausſchließen, wo x und y einen gemeinen Theiler unter ſich haben; weil alsdenn $xx + yy$ ſich auch durch denſelben Theiler, und zwar durch das Quadrat deſſelben würde theilen laſſen. Denn wäre z. B. $x = 7p$ und $y = 7q$, ſo würde die Summe ihrer Quadrate $49pp + 49qq = 49(pp + qq)$ ſich gar durch 49 haben theilen laſſen. Daher geht die Frage nur auf ſolche Formeln, wo x und y keinen gemeinen Theiler haben, oder unter ſich untheilbar ſind. Die Schwierigkeit fällt hier bald in die Augen. Denn man ſieht zwar, daß, wenn die beyden Zahlen x und y ungerade ſind, alsdenn die Formel $xx + yy$ eine gerade Zahl, und alſo durch 2 theilbar werde; wenn aber eine Zahl gerade, und die andere ungerade iſt, die Formel ungerade ſeyn müſſe; allein ob ſie Theiler habe, oder nicht, iſt nicht ſo leicht zu ſehen.

Beyde Zahlen x und y können nicht gerade ſeyn, weil ſie keinen gemeinen Theiler unter ſich haben müſſen.

§. 343.

Es ſeyen demnach die beyden Zahlen x und y untheilbar unter ſich, und gleichwohl ſoll die Formel $xx + yy$ zwey oder mehr Faktores in ſich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht Statt finden, weil ſich dieſe Formel nicht in zwey rationale Faktores auflöſen läßt; allein die irrationalen Faktores, in welche dieſe Formel aufgelöſet wird, und die durch dieſes Produkt $(x + y\sqrt{-1}) \times (x - y\sqrt{-1})$ vorgeſtellet werden kann, können uns eben denſelben Dienſt leiſten. Denn wenn die Formel $xx + yy$ wirkliche Faktores hat, ſo müſſen die irrationalen Faktores wiederum Faktores haben, indem, wenn dieſe Faktoren keine weitere Theiler hätten, auch ihr Produkt keine haben könnte. Da aber dieſe Faktores irrational, ja ſogar imaginär ſind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben ſollen, ſo können dieſelben keine rationale Faktores haben, ſondern ſie müſſen irrational und ſogar imaginär von gleicher Art ſeyn.

§. 344.

Will man alſo, daß dieſe Formel $xx + yy$ zwey rationale Faktores bekomme, ſo gebe man beyden irrationalen Faktoren auch zwey Faktores, und ſetze erſtlich $x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})(r + s\sqrt{-1})$, da denn, weil $\sqrt{-1}$ ſowohl negativ als poſitiv genommen werden kann, von ſelbſt ſeyn wird $x - y\sqrt{-1} = (p - q\sqrt{-1})(r - s\sqrt{-1})$, ſo daß das Produkt davon, d. i. unſere Formel, $xx + yy = (pp + qq)(rr + ss)$ ſeyn wird, welche alſo zwey rationale Faktores enthält, nemlich $pp + qq$ und $rr + ss$. Hier iſt aber noch übrig, die Werthe von x und y zu beſtimmen, als welche auch rational ſeyn müſſen.

Wenn man nun jene irrationalen Faktores mit

einander multiplicirt, ſo bekömmt man $x + y\sqrt{-1} = pr - qs + ps\sqrt{-1} + qr\sqrt{-1}$, und $x - y\sqrt{-1} = pr - qs - qr\sqrt{-1} - ps\sqrt{-1}$. Addirt man dieſe Formeln, ſo wird $x = pr - qs$; ſubtrahirt man dieſelben aber von einander, ſo entſteht dieſe Gleichung: $2y\sqrt{-1} = 2ps\sqrt{-1} + 2qr\sqrt{-1}$; oder $y = ps + qr$.

Nimmt man alſo $x = pr - qs$, und $y = ps + qr$, ſo erhält unſere Formel $xx + yy$ gewiß zwey Faktores; denn es iſt $xx + yy = (pp + qq)(rr + ss)$. Verlangte man mehr Faktores, ſo dürfte man nur auf eben dieſe Art p und q ſo annehmen, daß $pp + qq$ zwey Faktores hätte; alsdenn würde man in allem drey Faktores haben, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehrt werden könnte.

§. 345.

Da hier nun die Quadrate von p, q, r, und s vorkommen, ſo können dieſe Buchſtaben auch negativ genommen werden. Nimmt man z. B. q negativ, ſo wird $x = pr + qs$, und $y = ps - qr$, von welchen die Summe der Quadrate mit der vorigen einerley iſt. Hieraus erſehen wir, daß, wenn eine Zahl einem ſolchen Produkte wie $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich iſt, dieſelbe auf eine doppelte Art in zwey Quadrate zerlegt werden könne; denn wir haben erſtlich gefunden $x = pr - qs$ und $y = ps + qr$, hernach auch $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$.

Es ſey z. B. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$, und $s = 1$, ſo daß dieſes Produkt $13 \times 5 = 65 = xx + yy$ herauskömmt, da denn entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$ ſeyn wird; in beyden Fällen aber iſt $xx + yy = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, ſo wird auch das Produkt noch auf mehrere Arten eine Summe von zwey Quadratzahlen ſeyn. Man multiplicire z. B. $2^2 + 1^2 = 5$ in $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$, ſo iſt das Pro-

dukt 1105, welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadrate zerlegt werden kann:
I.) $33^2 + 4^2$, II.) $22^2 + 9^2$, III.) $31^2 + 12^2$, IV.) $24^2 + 23^2$.

§. 346.

Unter den Zahlen, die in der Form $xx + yy$ enthalten ſind, befinden ſich alſo erſtlich ſolche, die aus zwey oder mehrern dergleichen Zahlen durch die Multiplikation zuſammengeſetzt, hernach aber auch ſolche, welche nicht auf dieſe Art zuſammengeſetzt ſind; dieſe wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx + yy$, jene aber zuſammengeſetzte nennen. Daher werden die einfachen Zahlen folgende ſeyn:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49 ꝛc.

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Primzahlen oder ſolche, welche gar keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, und welche alle, außer 2, ſo beſchaffen ſind, daß, wenn man 1 davon wegnimmt, das Uebrige durch 4 theilbar wird, oder welche alle in dieſer Form $4n + 1$ enthalten ſind. Ferner ſind darunter auch Quadratzahlen vorhanden, als 9, 49 ꝛc., deren Wurzeln aber 3, 7 ꝛc. nicht vorkommen; wobey zu merken iſt, daß dieſe Wurzeln 3, 7 ꝛc. in der Form $4n - 1$ enthalten ſind. Es iſt aber auch offenbar, daß keine Zahl von dieſer Form $4n - 1$ eine Summe von zwey Quadraten ſeyn könne. Denn da dieſe Zahlen ungerade ſind, ſo müßte eins von den beyden Quadraten gerade, das andere aber ungerade ſeyn. Wir haben aber geſehen, daß alle gerade Quadrate durch 4 theilbar, die ungeraden aber in dieſer Form $4n + 1$ enthalten ſind. Wenn man daher ein gerades und ein ungerades Quadrat zuſammen addirt, ſo bekömmt die Summe immer dieſe Form $4n + 1$, und niemals die Form $4n - 1$. Daß aber alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ eine Summe von zwey Quadraten ausmachen, iſt zwar gewiß, aber nicht ſo leicht zu beweiſen.

§. 347.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx + 2yy$ betrachten, um zu ſehen, was x und y für Werthe haben müſſen, damit dieſelbe Faktores erhalte. Da nun dieſe Formel durch folgende imaginäre Faktores vorgeſtellt wird: $(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})$, ſo erſieht man, wie vorher, daß, wenn unſere Formel Faktores hat, auch ihre imaginäre Faktores dergleichen haben müſſen. Man ſetze daher erſtlich $x + y\sqrt{-2} = (p + q\sqrt{-2})(r + s\sqrt{-2})$, ſo folget von ſelbſt, daß auch $x - y\sqrt{-2} = (p - q\sqrt{-2})(r - s\sqrt{-2})$ ſeyn müſſe, und hieraus wird unſere Formel $xx + 2yy = (pp + 2qq)(rr + 2ss)$, und hat alſo zwey Faktores, deren ſogar ein jeder von eben derſelben Art iſt. Damit aber dieſes geſchehe, ſo müſſen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgendergeſtalt geſchehen kann. Denn da
$x + y\sqrt{-2} = pr - 2qs + qr\sqrt{-2} + ps\sqrt{-2}$
und $x - y\sqrt{-2} = pr - 2qs - qr\sqrt{-2} - ps\sqrt{-2}$, ſo iſt die Summe $2x = 2pr - 4qs$; folglich $x = pr - 2qs$. Hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2} = 2qr\sqrt{-2} + 2ps\sqrt{-2}$; daher $y = qr + ps$. Wenn alſo unſere Formel $xx + 2yy$ Faktores haben ſoll, ſo ſind dieſelben immer ſo beſchaffen, daß der eine $pp + 2qq$, und der andere $rr + 2ss$ ſeyn wird, oder ſie ſind beyde Zahlen von eben der Art, als $xx + 2yy$; und damit dieſes geſchehe, ſo können x und y wieder auf zweyerley Art beſtimmt werden, weil q ſowohl negativ als poſitiv genommen werden kann. Man wird nemlich haben, erſtlich $x = pr - 2qs$ und $y = ps + qr$, und hernach auch $x = pr + 2qs$ und $y = ps - qr$.

§. 348.

Dieſe Formel $xx + 2yy$ enthält alſo alle diejenigen Zahlen in ſich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrate beſtehen, und welche wir hier bis auf

50 herſetzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 49, 50. Wir können ſie wieder, wie vorher, in einfache und zuſammengeſetzte abtheilen; da werden denn die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zuſammengeſetzt ſind, folgende ſeyn: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, welche alle, außer den Quadraten 25 und 49, Primzahlen ſind. Von denen aber, die hier nicht ſtehen, kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemerken, daß alle Primzahlen, die in unſerer Formel enthalten ſind, entweder unter die Form $8n+1$, oder unter dieſe $8n+3$ gehören; da hingegen die übrigen, welche entweder in der Form $8n+5$, oder in dieſer $8n+7$ enthalten ſind, nimmermehr aus einem Quadrate und einem doppelten Quadrate beſtehen können. Es iſt aber gewiß, daß alle Primzahlen, die in einer von den beyden erſten Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten ſind, ſich allezeit in ein Quadrat und in ein doppeltes Quadrat auflöſen laſſen.

§. 349.

Laßt uns auf eine gleiche Weiſe zu dieſer allgemeinen Formel $xx+cyy$ fortſchreiten, und ſehen, was man x und y für Werthe geben müſſe, damit dieſe Formel Faktores erhalte.

Da nun dieſelbe durch dieſes Produkt vorgeſtellet wird $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, ſo gebe man einem jeden dieſer Faktoren wiederum zwey Faktores von gleicher Art. Man ſetze nemlich $x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-c})$, und $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-c})$. Nunmehr wird unſere Formel $xx+cyy=(pp+cqq)(rr+css)$ werden, woraus erhellet, daß die Faktores wiederum von eben der Art, als die Formel ſelbſt, ſeyn müſſen. Die Werthe aber von x und y werden folgende ſeyn:
$x=pr+cqs$ und $y=qr+ps$, oder $y=ps-qr$;

und hieraus iſt leicht abzuſehen, wie unſere Formel noch mehr Faktores erhalten könne.

§. 350.

Nun iſt es auch leicht, dieſer Formel $xx - cyy$ Faktores zu verſchaffen, weil man nur $-c$ anſtatt $+c$ ſchreiben darf. Inzwiſchen laſſen ſich dieſelben auch unmittelbar folgendergeſtalt finden. Da unſere Formel dieſem Produkte $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$ gleich iſt, ſo ſetze man $x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c})$ und $x - y\sqrt{c}\,(p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c})$, woraus ſogleich dieſe Faktores folgen: $xx - cyy = (pp - cqq)(rr - css)$, welche wieder von eben der Art, als unſere Formel ſelbſt ſind. Die Werthe aber von x und y laſſen ſich auch wiederum auf eine doppelte Art beſtimmen, nemlich erſtlich $x = pr + cqs$ und $y = qr + ps$, hernach auch $x = pr - cqs$ und $y = ps - qr$. Will man die Probe machen, ob ſolchergeſtalt das gefundene Produkt herauskomme, ſo probire man die erſten Werthe, da denn $xx = pprr + 2cpqrs + ccqqss$, und $y = ppss + 2pqrs + qqrr$ ſeyn wird; folglich $cyy = cppss + 2cpqrs + cqqrr$, woraus man erhält: $xx - cyy = pprr - cppss + ccqqss - cqqrr$, welches mit dem gefundenen Produkte $(pp - cqq)(rr - css)$ übereinkömmt.

§. 351.

Bisher haben wir das erſte Glied ohne Coefficienten betrachtet; nun wollen wir ſetzen, daß daſſelbe auch mit einem Buchſtaben multiplicirt ſey, und ſuchen, was die Formel $axx + cyy$ für Faktores erhalten könne.

Hier iſt nun klar, daß unſere Formel dieſem Produkte $(x\sqrt{a} + y\sqrt{-c})(x\sqrt{a} - y\sqrt{-c})$ gleich ſey, welchen beyden Faktoren demnach wiederum Faktores gegeben werden müſſen. Hiebey aber ereignet ſich eine Schwierigkeit. Denn wenn man zufolge der obigen Art ſetzen wollte: $x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})$

$(r\sqrt{a} + s\sqrt{-c}) = apr - cqs + ps\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, und $x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r\sqrt{a} - s\sqrt{-c})$ $= apr - cqs - ps\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$, woraus man $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cqs$, und $2y\sqrt{-c} = 2ps\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$ erhielte, ſo würde man ſowohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keinesweges Statt haben.

§. 352.

Dieſer Schwierigkeit aber kann dadurch abgeholfen werden, wenn man ſetzet:
$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-ac})$
$= pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} + qr\sqrt{-c} + aps\sqrt{-c}$ und
$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-ac})$
$= pr\sqrt{a} - cqs\sqrt{a} - qr\sqrt{-c} - aps\sqrt{-c}$; woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden: $x = pr - cqs$, und $y = qr + aps$. Alsdenn aber wird unſere Formel folgende Faktores bekommen: $axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss)$, von welchen nur einer eben die Form hat, als unſere Formel, der andere aber von einer ganz andern Gattung iſt.

§. 353.

Unterdeſſen ſtehen doch dieſe zwey Formeln in einer ſehr genauen Verwandſchaft mit einander, indem alle Zahlen, die in der erſteren Form enthalten ſind, wenn ſie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erſte Form fallen. Wir haben auch ſchon geſehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx + acyy$, als welche mit der obigen $xx + cyy$ übereinkömmt, mit einander multiplicirt, wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Es iſt alſo nur noch der Fall zu unterſuchen, wenn zwey Zahlen von der erſten Form $axx + cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Produkt alsdenn gehöre.

Laßt uns demnach dieſe zwey Formeln von der

erſten Art $(app + cqq)$ $(arr + css)$ mit einander multipliciren, welches Produkt ſo vorgeſtellt werden kann: $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, ſo bekommen wir dieſe Formel $xx + acyy$, welche von der letztern Art iſt; daher denn zwey Zahlen von der erſtern Art $axx + cyy$, mit einander multiplicirt, eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürzlich folgendergeſtalt ausdrücken kann, wenn man die Zahlen von der erſten Art durch I, die von der zweyten Art aber durch II andeutet. Nemlich I X I giebt II; I X II giebt I; II X II giebt II, woraus auch ferner erhellt, was heraus kommen müſſe, wenn man mehrere ſolche Zahlen mit einander multiplicirt; als I X I X I giebt I; I X I X II giebt II; I X II X II giebt I; II X II X II X II giebt II.

§. 354.

Um dieſes zu erläutern, ſo ſey $a = 2$ und $c = 3$, woraus dieſe zwey Arten von Zahlen entſpringen. Die erſte iſt in der Form $2xx + 3yy$, die andere aber in der Form $xx + 6yy$ enthalten. Nun aber ſind die Zahlen von der erſten Art bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art ſind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der erſten Art, z. B. 35, mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, ſo iſt das Produkt 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx + 3yy$ enthalten iſt; oder man kann für y eine ſolche Zahl finden, daß $1085 - 3yy$ ein doppeltes Quadrat, nemlich $2xx$ werde. Dieſes geſchieht nun erſtlich, wenn $y = 3$ iſt, denn da wird $x = 23$; hernach auch, wenn $y = 11$, denn da wird $x = 19$; drittens auch noch, wenn $y = 13$, denn da wird $x = 17$, und end-

lich viertens, wenn $y = 19$, denn da wird $x = 1$. Man kann dieſe beyden Arten von Zahlen wiederum in einfache und zuſammengeſetzte abtheilen, indem diejenigen zuſammengeſetzt ſind, welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art beſtehen. Es werden alſo von der erſten Art folgende einfach ſeyn: 2, 3, 5, 11, 29; dieſe hingegen zuſammengeſetzt: 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, ꝛc.

Von der zweyten Art aber ſind folgende einfach: 1, 7, 31, die übrigen ſind alle zuſammengeſetzt, nemlich, 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

Zehntes Kapitel.

Auflöſung einiger Aufgaben, die zu dieſem Theile der Analytik gehören.

§. 355.

Wir haben bisher die Kunſtgriffe erklärt, welche in dieſem Theil der Analytik vorkommen und nöthig ſind, um alle diejenigen Aufgaben, ſo hieher gehören, aufzulöſen; daher wir, um dieſes in ein größeres Licht zu ſetzen, einige dergleichen Fragen hier vorlegen, und die Auflöſung derſelben beyfügen wollen.

§. 356.

I. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl von der Beſchaffenheit, daß, wenn man entweder 1 zu derſelben addirt, oder auch 1 davon ſubtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Setzt man die geſuchte Zahl $= x$, ſo muß ſowohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat ſeyn. Für das

erſtere ſetze man $x+1=pp$, ſo wird $x=pp-1$ und $x-1=pp-2$, welches auch ein Quadrat ſeyn muß. Man ſetze, die Wurzel davon ſey $p-q$, ſo wird $pp-2=pp-2pq+qq$, wo ſich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p=\frac{qq+2}{2q}$; woraus man ferner erhält $x=\frac{q^4+4}{4qq}$, wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man ſetze daher $q=\frac{r}{s}$, ſo erhalten wir $x=\frac{r^4+4s^4}{4rrss}$ wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen.

Wenn $r=$	1	2	1	3
und $s=$	1	1	2	1
ſo wird $x=$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

§. 357.

II. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl x von der Beſchaffenheit, daß, wenn man dazu 2 beliebige Zahlen als z. B. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Es müſſen alſo dieſe zwey Formeln $x+4$ und $x+7$ Quadrate werden. Man ſetze daher für die erſtere $x+4=pp$, ſo wird $x=pp-4$; die andere Formel aber wird $x+7=pp+3$, welche auch ein Quadrat ſeyn muß. Man ſetze daher die Wurzel davon $=p+q$, ſo wird $pp+3=pp+2pq+qq$, woraus gefunden wird $p=\frac{3-qq}{2q}$; folglich

$x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, ſo bekommen wir $x=\frac{9s^4-22rrss+r^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige ganze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r=1$ und $s=1$, ſo wird $x=-3$, und daraus wird $x+4=1$ und $x+7=4$. Will

man aber eine poſitive Zahl für x haben, ſo ſetze man $s = 2$ und $r = 1$, da bekommt man $x = \frac{57}{16}$; daraus wird $x + 4 = \frac{121}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$. Will man ferner ſetzen $s = 3$ und $r = 1$, ſo bekommt man $x = \frac{133}{9}$, woraus $y + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, ſo ſetze man $r = 5$ und $s = 1$, da wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

§. 358.

III. Aufgabe. Man ſuche einen ſolchen Bruch x, daß, wenn man denſelben entweder zu 1 addirt oder von 1 ſubtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Weil dieſe beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate ſeyn ſollen, ſo ſetze man für die erſtere $1 + x = pp$, da wird $x = pp - 1$, und die andere Formel $1 - x = 2 - pp$, welche ein Quadrat ſeyn ſoll. Da nun weder das erſte, noch das letzte Glied ein Quadrat iſt, ſo muß man ſehen, ob man einen Fall errathen kann, wo ſolches geſchieht. Ein ſolcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich wenn $p = 1$; deswegen ſetze man $p = 1 - q$, ſo daß $x = qq - 2q$, ſo wird unſere Formel $2 - pp = 1 + 2q - qq$; davon ſetze man die Wurzel $= 1 - qr$, ſo bekommt man $1 + 2q - qq = 1 - 2qr + qqrr$. Hieraus wird $2 - q = -2r + qrr$ und $q = \frac{2r + 2}{rr + 1}$; folglich $x = \frac{4r - 4r^3}{(rr + 1)^2}$.

Weil r ein Bruch iſt, ſo ſetze man $r = \frac{t}{u}$, ſo wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(tt + uu)^2} = \frac{4tu(uu - tt)}{(tt + uu)^2}$; alſo muß u größer ſeyn als t.

Man ſetze demnach $u = 2$ und $t = 1$, ſo wird $x = \frac{24}{25}$. Setzt man $u = 3$ und $t = 2$, ſo wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate ſind.

§. 359.

IV. Aufgabe. Man ſuche ſolche Zahlen x, welche ſowohl zu 10 addirt, als von 10 ſubtrahirt, Quadrate hervorbringen.

Es muͤſſen alſo dieſe Formeln $10+x$ und $10-x$ Quadrate ſeyn, welches nach der vorigen Weiſe geſchehen koͤnnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, ſo bedenke man, daß auch das Produkt dieſer Formeln ein Quadrat ſeyn muͤſſe, nemlich $100-xx$. Da nun hier das erſte Glied ein Quadrat iſt, ſo ſetze man die Wurzel $=10-px$, ſo wird $100-xx=100-20px+ppxx$ und alſo $x=\frac{20p}{pp+1}$. Hieraus aber folgt, daß nur das Produkt ein Quadrat werde, nicht aber eine jede Formel beſonders. Wenn aber nur die eine ein Quadrat wird, ſo muß die andere nothwendig auch eines ſeyn. Nun aber wird die erſte $10+x=\frac{10pp+20p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$; und weil $pp+2p+1$ ſchon ein Quadrat iſt, ſo muß noch dieſer Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat ſeyn; folglich auch dieſer $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es iſt alſo nur noͤthig, daß die Zahl $10pp+10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geſchieht, errathen werden muß. Dieſer iſt, wenn $p=3$, und deswegen ſetze man $p=3+q$, ſo bekommt man $100+60q+10qq$; davon ſetze man die Wurzel $10+qt$, ſo wird $100+60q+10qq=100+20qt+qqtt$; daraus wird $q=\frac{60-20t}{tt-10}$ und $p=3+q$, und $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Setzt man $t=3$, ſo wird $q=0$ und $p=3$, folglich $x=6$; daher wird $10+x=16$ und $10-x=4$. Es ſey aber $t=1$, ſo wird $q=-\frac{40}{9}$ und $p=-\frac{13}{9}$ und $x=-\frac{234}{25}$. Man kann aber auch ſetzen $x=+\frac{234}{25}$,

und dann wird $10+x=\frac{484}{25}$ und $10-x=\frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate ſind.

§. 360.

Anmerkung. Wollte man dieſe Aufgabe allgemein machen, und für jegliche gegebene Zahl a ſolche Zahlen x verlangen, ſo daß ſowohl $a+x$, als auch $a-x$ ein Quadrat werden ſollte, ſo würde die Auflöſung öfters unmöglich werden, nemlich in allen den Fällen, wo die Zahl a keine Summe von 2 Quadraten iſt. Aber wir haben ſchon oben geſehen, daß, von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieſer Form $xx+yy$ enthalten ſind.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.
Die übrigen alſo, welche gleichfalls bis 50 gehen:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48, können nicht in zwey Quadrate zerlegt werden. So oft alſo a eine von dieſen letztern Zahlen wäre, ſo oft würde auch die Frage unmöglich ſeyn.

Um dieſes zu zeigen, ſo laßt uns ſetzen $a+x=pp$ und $a-x=qq$. Hier giebt die Addition $2a=pp+qq$; ſo daß 2a eine Summe von zwey Quadraten ſeyn muß. Iſt aber 2a eine ſolche Summe, ſo muß auch a eine ſolche ſeyn. Wenn daher a keine Summe von 2 Quadraten iſt, ſo iſt es auch nicht möglich, daß $a+x$ und $a-x$ zugleich Quadrate ſeyn können.

§. 361.

Wenn demnach $a=3$ wäre, ſo würde die Aufgabe unmöglich ſeyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe von zwey Quadraten iſt. Man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieſes iſt auch nicht möglich, denn in dieſem Falle wäre $3=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$, und multipli-

cirte man mit $qqss$, ſo würde $3qqss = ppss + qqrr$, wo $ppss + qqrr$ eine Summe von zwey Quadraten iſt, welche ſich durch 3 theilen ließe. Wir haben aber oben geſehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine andere Theiler haben könne, als welche ſelbſt ſolche Summen ſind.

Es laſſen ſich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen; allein dieſelben ſind auch durch 9 theilbar, und ſogar ein jedes der beyden Quadrate, woraus ſie beſtehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht ſtatt findet; daher dieſer Schluß ſeine Richtigkeit hat, daß, wenn eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten iſt, ſolches auch nicht in Brüchen geſchehen könne; iſt aber die Zahl a in ganzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, ſo kann dieſelbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten ſeyn, welches wir zeigen wollen.

§. 362.

V. **Aufgabe.** Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten iſt, auf unendlich vielerley Arten in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen.

Die vorgegebene Zahl ſey alſo $ff + gg$, und man ſoll zwey andere Quadrate, als xx und yy, ſuchen, deren Summe $xx + yy$ der Zahl $ff + gg$ gleich ſey, ſo daß $xx + yy = ff + gg$. Hier iſt nun ſogleich klar, daß, wenn x größer oder kleiner iſt als f, auch y umgekehrt kleiner oder größer ſeyn müſſe als g. Man ſetze daher $x = f + pz$ und $y = g - qz$, ſo wird $ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg$, wo ſich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen laſſen. Daher wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und alſo $z = \frac{2gq - 2fq}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden: $x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}$

und $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$, wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es ſey die gegebene Zahl 2, ſo daß $f = 1$ und $g = 1$, ſo wird $xx + yy = 2$, wenn $x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq}$ und $y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq}$. Setzt man $p = 2$ und $q = 1$, ſo wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

§. 363.

VI. Aufgabe. Wenn die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten iſt, ſolche Zahlen x zu finden, daß ſowohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde.

Es ſey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$ und man ſetze $13 + x = pp$ und $13 - x = qq$, ſo giebt erſtlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction aber $2x = pp - qq$; alſo müſſen p und q ſo beſchaffen ſeyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten iſt, nemlich $25 + 1$; folglich muß dieſe Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekommt man erſtlich $p = 5$ und $q = 1$, und daraus wird $x = 12$. Hernach aber kann aus dem Obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelöſt werden. Denn, weil $f = 5$ und $g = 1$, wenn wir in den obigen Formeln anſtatt der Buchſtaben p und q ſchreiben t und u, ſtatt x und y aber die Buchſtaben p und q, ſo finden wir $p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu}$ und $q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu}$. Nimmt man für t und u Zahlen nach Belieben an, und beſtimmt daraus die Buchſtaben p und q, ſo erhält man die geſuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$. Es ſey z. B. $t = 2$ und $u = 1$, ſo wird $p = \frac{11}{5}$ und $q = \frac{21}{5}$, und daher $pp - qq = \frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

§. 364.

Um aber dieſe Aufgabe allgemein aufzulöſen, ſo ſey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die geſuchte aber $= z$, ſo daß dieſe Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden ſollen.

Nun ſetze man $a + z = xx$ und $a - z = yy$, ſo wird erſtlich $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, und hernach $2z = xx - yy$. Es müſſen alſo die Quadrate xx und yy ſo beſchaffen ſeyn, daß $xx + yy = 2(cc + dd)$, wo $2(cc + dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten iſt, nemlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man ſetze Kürze halber $c + d = f$ und $c - d = g$, ſo daß $xx + yy = ff + gg$ ſeyn muß. Dieſes geſchieht aber aus dem obigen, wenn man nimmt $x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq}$ und $y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}$. Hieraus bekommt man die leichteſte Auflöſung, wenn man ſetzt $p = 1$ und $q = 1$; denn daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar $cc + dd + 2cd = (c + d)^2$ und $cc + dd - 2cd = (c - d)^2$.

Um eine andere Auflöſung zu finden, ſo ſey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{7c + d}{5}$ und $y = \frac{c - 7d}{5}$, wo ſowohl c und d, als auch x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer ſeyn ſoll, als y, ſo nehme man d negativ, und da wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, welcher Werth zu $a = cc + dd$ addirt $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$ giebt, wovon die Quadratwurzel $\frac{c + 7d}{5}$ iſt. Subtrahirt man aber z von a, ſo bleibt $\frac{49cc - 14cd + dd}{25}$, wovon die Qua-

dratwurzel $\frac{7c-d}{5}$ iſt; jene iſt nemlich x, dieſe aber y.

§. 365.

VII. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl x, von der Beſchaffenheit, daß, wenn ſowohl zu derſelben ſelbſt, als zu ihrem Quadrate xx eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme.

Es müſſen alſo dieſe beyden Formeln $x+1$ und $xx+1$ zu Quadraten gemacht werden. Man ſetze daher für die erſte $x+1=pp$, ſo wird $x=pp-1$ und die zweyte Formel $xx+1=p^4-2pp+2$, welche Formel ein Quadrat ſeyn ſoll. Dieſelbe aber iſt von der Art, daß ſich keine Auflöſung finden läßt, wofern nicht ſchon ein Fall bekannt iſt. Ein ſolcher Fall aber fällt ſogleich in die Augen, nemlich wo $p=1$. Man ſetze daher $p=1+q$, ſo wird $xx+1=1+4qq+4q^3+q^4$, welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man ſetze erſtlich die Wurzel davon $1+qq$, ſo iſt $1+4qq+4q^3+q^4=1+2qq+q^4$; daraus wird $4q+4qq=2q$ oder $4+4q=2$ und $q=-\frac{1}{2}$, folglich $p=\frac{1}{2}$ und $x=-\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1-qq$, ſo wird $1+4qq+4q^3+q^4=1-2qq+q^4$, und daher $q=-\frac{3}{2}$ und $p=-\frac{1}{2}$, hieraus $x=-\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1+2q+qq$, damit ſich die erſten und die zwey letzten Glieder aufheben, ſo wird $1+4qq+4q^3+q^4=1+4q+6qq+4q^3+q^4$; daraus wird $q=-2$ und $p=-1$, daher $x=0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel $1-2q-qq$ ſetzen; ſo wird $1+4qq+4q^3+q^4=1-4q+2qq+4q^3+q^4$, daraus wird $q=-2$, wie vorher.

V. Damit die zwey erſten Glieder einander aufheben, ſo ſey die Wurzel $1+2qq$, da wird $1+4qq$

$+ 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4$, und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$, folglich $x = \frac{40}{9}$. Hieraus folgt $x + 1 = \frac{49}{9} = (\frac{7}{3})^2$ und $xx + 1 = \frac{1681}{81} = (\frac{41}{9})^2$.

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, ſo müßte man einen von dieſen hier gefundenen z. B. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner ſetzen $q = -\frac{1}{2} + r$; daraus aber würde $p = \frac{1}{2} + r$; $pp = \frac{1}{4} + r + rr$ und $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$, folglich unſere Formel $\frac{25}{16} - \frac{5}{2}r - \frac{1}{2}rr + 21^3 + r^4$, welche ein Quadrat ſeyn ſoll, und daher auch mit 16 multiplicirt, nemlich $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. Davon ſetze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, ſo daß $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr + ffrr \pm 8fr^3 + 16r^4$. Da nun die erſten und letzten Glieder wegfallen, ſo beſtimme man f ſo, daß auch die zweyten wegfallen, welches geſchieht, wenn $-24 = 10f$ und alſo $f = -\frac{12}{5}$; alsdenn geben die übrigen Glieder, durch rr dividirt, $-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr$. Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, ſo wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$; daraus wird $x + 1 = (\frac{31}{20})^2$, und $xx + 1 = (\frac{689}{400})^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, ſo wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus $r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, ſo wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entſpringt.

III. Es ſey die Wurzel $4rr + 4r \pm 5$, ſo daß $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr + 16rr, \pm 40r + 25$: wo die zwey erſten und die ganz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt, geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder $-24r - 24 = \pm 40r \pm 40$. Wenn das obere Zeichen gilt, ſo wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das iſt $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$,

welchen Fall wir ſchon gehabt haben; und eben derſelbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man ſetze die Wurzel $5 + fr + grr$ und beſtimme f und g alſo, daß die drey erſten Glieder wegfallen. Da nun $25 - 24r - 8rr + 32r^2 + 16r^4 = 25 + 10fr + 10grr + ffrr + 2fgr^3 + ggr^4$, ſo wird erſtlich $-24 = 10f$ und alſo $f = -\frac{12}{5}$; ferner $-8 = 10g + ff$, und alſo $g = \frac{-8 - ff}{10}$, oder $g = -\frac{344}{250} = -\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32 + 16r = 2fg + ggr$, und daraus wird $r = \frac{2fg - 32}{16 - gg}$. Hier wird der Zähler $2fg - 32 = \frac{+24 \cdot 172 - 32 \cdot 625}{5 \cdot 125} = \frac{-32 \cdot 496}{625}$, oder dieſer Zähler $= \frac{-16 \cdot 32 \cdot 31}{625}$; der Nenner aber giebt $16 - gg = (4+g)(4-g) = \frac{328}{125} \cdot \frac{672}{125}$, oder $16 - gg = \frac{8 \cdot 32 \cdot 41 \cdot 21}{25 \cdot 625}$; daraus wird $r = -\frac{1550}{861}$, hieraus $p = -\frac{2739}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x = pp - 1$ gefunden.

§. 366.

VIII. Aufgabe. Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine ſolche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derſelben addirt ein Quadrat hervorbringe.

Es müſſen alſo dieſe drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x + a$, $x + b$, und $x + c$.

Man ſetze für die erſtere $x + a = zz$, und alſo $x = zz - a$, ſo werden die beyden andern Formeln $zz + b - a$ und $zz + c - a$, wovon eine jede ein Quadrat ſeyn ſoll. Hiervon aber läßt ſich keine allgemeine Auflöſung geben, weil ſolches ſehr oft unmöglich iſt, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beſchaffenheit der beyden Zahlen $b - a$, und $c - a$.

Denn wäre z. B. $b - a = 1$ und $c - a = -1$, das iſt $b = a + 1$ und $c = a - 1$, ſo müßten $zz + 1$ und $zz - 1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch ſeyn. Man ſetze daher $z = \frac{p}{q}$, ſo würden dieſe zwey Formeln $pp + qq$ und $pp - qq$ Quadrate ſeyn müſſen; folglich müßte auch ihr Produkt, nemlich $p^4 - q^4$, ein Quadrat ſeyn. Daß aber dieſes nicht möglich ſey, iſt oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b - a = 2$, und $c - a = -2$, das iſt $b = a + 2$ und $c = a - 2$, ſo müßten, wenn man wiederum ſetzte $z = \frac{p}{q}$, dieſe zwey Formeln $pp + 2qq$ und $pp - 2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Produkt $p^4 - 4q^4$, welches ebenfalls nicht möglich iſt.

Man ſetze überhaupt $b - a = m$ und $c - a = n$, ferner auch $z = \frac{p}{q}$, ſo müſſen dieſe Formeln $pp + mqq$ und $pp + nqq$ Quadrate ſeyn; welches, wie wir oben geſehen, unmöglich iſt, wenn entweder $m = +1$ und $n = -1$, oder wenn $m = +2$ und $n = -2$ iſt.

Es iſt auch ferner nicht möglich, wenn $m = ff$ und $n = -ff$. Denn alsdenn würde das Produkt derſelben $p^4 - f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten ſeyn, welche niemals ein Quadrat werden kann.

Eben ſo, wenn $m = 2ff$ und $n = -2ff$, ſo können auch dieſe Formeln $pp + 2ffqq$ und $pp - 2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Produkt $p^4 - 4f^4q^4$ ebenfalls ein Quadrat ſeyn müßte; folglich auch, wenn man ſetzt $fq = r$, dieſe Formel $p^4 - 4r^4$, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden iſt.

Wäre ferner $m = 1$ und $n = 2$, ſo daß dieſe Formeln $pp + qq$ und $pp + 2qq$ Quadrate ſeyn müßten, ſo ſetze man $pp + qq = rr$ und $pp + 2qq = ss$; da wird aus der erſteren $pp = rr - qq$, und alſo die andere $rr + qq = ss$; daher müßte ſowohl $rr - qq$, als

auch $rr+qq$, ingleichen ihr Produkt r^4-q^4 ein Quadrat ſeyn, welches unmöglich iſt.

Hieraus ſieht man zur Gnüge, daß es nicht leicht iſt, ſolche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflöſung möglich werde. Das einzige Mittel, ſolche Werthe für m und n zu finden, iſt, daß man dergleichen Fälle errathe, oder folgendergeſtalt ausfindig mache.

Man ſetze $ff+mgg=hh$ und $ff+ngg=kk$, ſo bekommt man aus der erſtern $m=\frac{hh-ff}{gg}$, und aus der andern $n=\frac{kk-ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, ſo bekommt man für m und n ſolche Werthe, wo die Auflöſung möglich iſt.

Es ſey z. B. $h=3$, $k=5$, $f=1$ und $g=2$, ſo wird $m=2$ und $n=6$. Jetzt ſind wir verſichert, daß es möglich ſey, die zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp+6qq$ zu Quadraten zu machen, weil ſolches geſchieht, wenn $p=1$ und $q=2$ iſt. Die erſte aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat, wenn $p=rr-2ss$ und $q=2rs$; denn da wird $pp+2qq=(rr+2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, wovon ein Fall bekannt iſt, da dieſelbe ein Quadrat wird, nemlich wenn $p=1$ und $q=2$, und welches geſchieht, wenn $r=1$ und $s=1$, oder wenn überhaupt $r=s$; denn da wird unſere Formel $25s^4$. Da wir nun dieſen Fall wiſſen, ſo ſetzen wir $r=s+t$, ſo wird $rr=ss+2st+tt$ und $r^4=s^4+4s^3t+6sstt+4st^3+t^4$; daher unſere Formel ſeyn wird: $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$. Davon ſey die Wurzel $5ss+fst+tt$, wovon das Quadrat $25s^4+10fs^3t+10sstt+ffsstt+2fst^3+t^4$ iſt, wo ſich die erſten und letzten Glieder von ſelbſt aufheben. Man nehme nun f ſo an, daß ſich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geſchieht, wenn $4=2f$ und $f=2$; alsdenn geben die übrigen, durch

ſſt dividirt, dieſe Gleichung: $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$. Daher wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$; folglich $r = -s$ und $rr = ss$, welches der bekannte Fall iſt.

Man nehme f ſo an, daß ſich die zweyten Glieder aufheben, welches geſchieht, wenn $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$, da denn die übrigen Glieder, durch st dividirt, $26s + 4t = 10s + ffs + 2ft$ geben, das iſt $\frac{84}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und alſo $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$; daher $r = 3$, und $s = 10$. Hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unſere Formeln werden: $pp + 2qq = 43681 = 209^2$, und $pp + 6qq = 58081 = 241^2$.

§. 367.

Anmerkung. Dergleichen Zahlen für m und n, da ſich unſere Formeln zu Quadraten machen laſſen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden. Es iſt aber zu merken, daß das Verhältniß dieſer Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es ſey dieſes Verhältniß wie a zu b, und man ſetze $m = az$ und $n = bz$, ſo kommt es nun darauf an, wie man z beſtimmen ſoll, daß dieſe beyden Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten gemacht werden können, welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

§. 368.

IX. **Aufgabe.** Wenn a und b gegebene Zahlen ſind, die Zahl z zu finden, damit ſich dieſe beyden Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten machen laſſen, und zugleich die kleinſten Werthe für p und q zu beſtimmen.

Man ſetze $pp + azqq = rr$ und $pp + bzqq = ss$, und man multiplicire die erſtere mit b, die andere aber mit a, ſo giebt die Differenz derſelben dieſe Glei-

chung: $(b-a)pp = brr - ass$ und alſo $pp = \frac{brr-ass}{b-a}$, welche Formel alſo ein Quadrat ſeyn muß. Da nun ſolches geſchieht, wenn $r = s$, ſo ſetze man, um die Brüche wegzubringen, $r = s + (b-a)t$, ſo wird

$$pp = \frac{brr-ass}{b-a} = \frac{bss + 2b(b-1)st + b(b-a)^2tt - ass}{b-a} = \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt}{b-a} = ss + 2bst + b(b-a)tt.$$

Nun ſetze man $p = s + \frac{x}{y}t$, ſo wird $pp = ss + \frac{2x}{y} \times st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt$, wo ſich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt, $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$ geben; daraus wird $t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}$; daher $\frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b-(b-a)yy - xx}$. Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$; ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus $p = s + \frac{x}{y} \times t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy$.
Da wir nun p nebſt r und s gefunden haben, ſo iſt noch übrig, z zu ſuchen. Man ſubtrahire zu dieſem Ende die erſte Gleichung $pp + azqq = rr$ von der zweyten $pp + bzqq = ss$, ſo giebt der Reſt $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r) \times (s-r)$. Da nun $s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ und $s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, oder $s + r = 2x([b-a]y - x)$ und $s - r = 2(b-a)y(by-x)$, ſo wird $(b-a)zqq = 2x([b-a]y - x) \times 2(b-a)y(by-x)$ oder $zqq = 2x([b-a]y - x) \times 2y(by-x)$ oder $zqq = 4xy([b-a]y-x)(by-x)$; folglich $z = \frac{4xy(b-a)y - x(by-x)}{qq}$.

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, wodurch ſich der Zähler theilen läßt; für

p aber haben wir ſchon gefunden $p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - abyy$, woraus man ſieht, daß dieſe Formeln leichter und einfacher werden, wenn man ſetzt $x = v + by$ oder $x - by = v$; denn da wird $p = vv - abyy$, und $z = \frac{4(v+by)yv(v+ay)}{qq}$ oder $z = \frac{4vy(v+ay)(v+ay)}{qq}$, wo die Zahlen v und y nach Belieben angenommen werden können, und alsdann findet man erſtlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, ſo in dem Zähler enthalten iſt, woraus ſich ſodann z ergiebt; da denn $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekömmt man die geſuchten Formeln.

I. $pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v+ay)(v+by)$, welche ein Quadrat und die Wurzel davon $r = -vv - 2ayy - abyy$ iſt.

II. Die zweyte Formel aber wird $pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v+ay)(v+by)$, welches auch ein Quadrat iſt, davon die Wurzel $s = -vv - 2bvy - abyy$; wo die Werthe von r und s auch poſitiv genommen werden können. Dieſes wird dienlich ſeyn, mit einigen Beyſpielen zu erläutern.

§. 369.

I. Beyſpiel. Es ſey $a = -1$ und $b = +1$, und man ſuche Zahlen für z ſo, daß dieſe zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können; die erſtere nemlich $= rr$, und die andere $= ss$. Hier wird $p = vv + yy$, und man hat alſo, um z zu finden, dieſe Formel zu betrachten: $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$; da wir dann für v und y verſchiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe ſuchen wollen, wie hier folget.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
v—y	1	1	3	1	7	7
v+y	3	5	5	9	25	9
zqq	4.6	4.30	16.15	9.16.5	36.25.16.7	16.9.14
qq	4	4	16	9.16	36.25.16	16.9
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöſet und zu Quadraten gemacht werden können.

I. Können dieſe zwey Formeln, $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, zu Quadraten gemacht werden, welches geſchieht, wenn $p = 5$ und $q = 2$. Denn da wird die erſte $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch dieſe zwey Formeln $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$ zu Quadraten gemacht werden, welches geſchieht, wenn $p = 13$ und $q = 2$; denn da wird die erſte $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch dieſe zwey Formeln $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$ Quadrate werden, welches geſchieht, wenn $p = 17$ und $q = 4$; denn da wird die erſte $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch dieſe zwey Formeln $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$ Quadrate werden, welches geſchieht, wenn $p = 41$ und $q = 12$; denn da wird die erſte $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können ferner dieſe zwey Formeln $pp - 7qq$ und $pp + 7qq$ Quadrate werden, welches geſchieht, wenn $p = 337$ und $q = 120$; denn da wird die erſte $113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, und die andere $113569 + 100800 = 214369 = 463^2$.

VI. Können endlich auch dieſe zwey Formeln

pp — 14qq und pp + 14qq Quadrate werden, welches geſchieht, wenn p = 65 und q = 12: denn da wird die erſte $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

§. 370.

II. Beyſpiel. Wenn die beyden Zahlen m und n ſich verhalten, wie 1:2, das iſt, wenn a = 1 und b = 2, alſo m = z und n = 2z, ſo ſollen die Werthe für z gefunden werden, ſo daß ſich dieſe Formeln pp + zqq und pp + 2zqq zu Quadraten machen laſſen.

Man hat nicht nöthig, hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, ſondern dieſes Beyſpiel kann ſogleich auf das vorige gebracht werden. Denn ſetzt man pp + zqq = rr und pp + 2zqq = ss, ſo bekommt man aus der erſten Gleichung pp = rr — zqq, welcher Werth für p in der zweyten geſetzt giebt rr + zqq = ss. Folglich müſſen dieſe zwey Formeln rr — zqq und rr + zqq zu Quadraten gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Beyſpiels iſt. Alſo hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14, ꝛc. Eine ſolche Verwandlung kann auch allgemein angeſtellt werden. Wenn wir annehmen, daß dieſe zwey Formeln pp + mqq und pp + nqq zu Quadraten gemacht werden können, ſo laßt uns ſetzen pp + mqq = rr und pp + nqq = ss, ſo giebt die erſtere Gleichung pp = rr — mqq, und alſo die zweyte ss = rr — mqq + nqq oder rr + (n — m)qq = ss. Wenn daher die erſteren Formeln möglich ſind, ſo ſind auch dieſe rr — mqq und rr + (n — m)qq möglich; und da wir m und n unter ſich verwechſeln können, ſo ſind auch dieſe möglich rr — nqq und rr + (m — n)qq. Sind aber jene Formeln unmöglich, ſo ſind auch dieſe unmöglich.

§. 371.

III. Beyſpiel. Es ſeyen die Zahlen m und n wie 1:3, oder a = 1 und b = 3, alſo m = z und n = 3z,

ſo daß dieſe Formeln $pp + zqq$ und $pp + 3zqq$ zu Quadraten gemacht werden ſollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, ſo wird die Sache möglich, ſo oft $zqq = 4vy(v + y)(v + 3y)$, und $p = vv - 3yy$ iſt. Man nehme daher für v und y folgende Werthe.

v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
v+y	2	5	5	9	25
v+3y	4	9	7	25	43
zqq	16.2	4.9.30	4.4.35	4.9.25.4.2	4.9.16.25.43
qq	16	49	44	4.49.25	4.9.16.25
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, woraus wir auf zweyerley Art dieſe Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten machen können. Erſtlich geſchieht dieſes, wenn $p = 2$ und $q = 4$, folglich auch wenn $p = 1$ und $p = 2$. Denn da wird $pp + 2qq = 9$ und $pp + 6qq = 25$. Hernach geſchieht es auch, wenn $p = 191$ und $q = 60$; denn da wird $pp + 2qq = 209^2$ und $pp + 6qq = 241^2$. Ob aber nicht auch ſeyn könnte $z = 1$, welches geſchehen würde, wenn für zqq ein Quadrat heraus käme, iſt ſchwer zu entſcheiden. Wollte man nun dieſe Frage erörtern, ob dieſe zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht, ſo könnte man die Unterſuchung auf folgende Art anſtellen.

§. 372.

Man ſoll alſo unterſuchen, ob dieſe zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht. Man ſetze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, ſo ſind folgende Punkte zu bedenken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter

ſich angenommen werden; denn hätten ſie einen gemeinen Theiler, ſo würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wenn p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl ſeyn; denn da würde q ungerade, und alſo die zweyte Formel eine Zahl von dieſer Art $4n + 3$ ſeyn, welche kein Quadrat werden kann; daher iſt p nothwendig ungerade, und pp eine Zahl von dieſer Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerade iſt, ſo muß aus der erſten Form q nicht nur gerade, ſondern ſogar durch 4 theilbar ſeyn, damit qq eine Zahl werde von dieſer Art $16n$, und $pp + qq$ von dieſer Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar ſeyn; denn da würde pp ſich durch 9 theilen laſſen, qq aber nicht, folglich $3qq$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und alſo auch $pp + 3qq$ durch 3, nicht aber durch 9, und könnte demnach kein Quadrat ſeyn. Folglich kann die Zahl nicht durch 3 ſich theilen laſſen; daher pp von der Art $3n + 1$ ſeyn wird.

V. Da ſich p nicht durch 3 theilen läßt, ſo muß ſich q durch 3 theilen laſſen. Denn wäre q nicht durch 3 theilbar, ſo würde qq eine Zahl von dieſer Art $3n + 1$, und daher $pp + qq$ von dieſer Art $3n + 2$, welche kein Quadrat ſeyn kann; folglich muß q durch 3 theilbar ſeyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar ſeyn. Denn wäre dieſes, ſo wäre q nicht durch 5 theilbar und qq eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, alſo $3qq$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$; und von welcher Art auch $pp + 3qq$ ſeyn würde, ſo könnte doch dieſe Formel kein Quadrat ſeyn; daher denn p nothwendig nicht durch 5 theilbar ſeyn kann, und alſo pp eine Zahl von der Art $5n + 1$, oder $5n + 4$ ſeyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar iſt, ſo wollen wir ſehen, ob ſich q durch 5 theilen laſſe oder nicht. Wäre q nicht theilbar durch 5, ſo wäre qq von dieſer Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir oben geſehen haben, und da pp entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ ſeyn muß, ſo

würde $pp + 3qq$ entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ eben wie pp ſeyn. Es ſey $pp = 5n + 1$, ſo müßte $qq = 5n + 4$ ſeyn, weil ſonſt $pp + qq$ kein Quadrat ſeyn könnte; alsdenn aber wäre $3qq = 5n + 2$, und $pp + 3qq = 5n + 3$, welches kein Quadrat ſeyn kann. Wäre aber $pp = 5n + 4$, ſo müßte $qq = 5n + 1$ und $3qq = 5n + 3$ ſeyn; folglich $pp + 3qq = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat ſeyn kann. Hieraus folget, daß qq durch 5 theilbar ſeyn müſſe.

VIII. Da nun q erſtlich durch 4, hernach durch 3 und drittens auch durch 5 theilbar ſeyn muß, ſo muß q eine ſolche Zahl ſeyn $4 . 3 . 5m$, oder $q = 60m$; daher unſere Formeln ſeyn würden: $pp + 3600mm = rr$ und $pp + 10800mm = ss$; da denn die erſte von der zweyten ſubtrahirt $7200mm = ss - rr = (s + r)(s - r)$ giebt, ſo daß $s + r$ und $s - r$ Factores von $7200mm$ ſeyn müſſen; wobey zu merken iſt, daß ſowohl s als r ungerade Zahlen, und dabey unter ſich untheilbar ſeyn müſſen.

IX. Es ſey demnach $7200mm = 4fg$ oder die Factores davon $2f$ und $2g$, und man ſetze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, ſo wird $s = f + g$ und $r = f - g$, da denn f und g unter ſich untheilbar ſeyn müſſen, und die eine gerade, die andere aber ungerade. Da nun $fg = 1800mm$, ſo muß man $1800mm$ in zwey Factores zerlegen, deren einer eine gerade, der andere aber eine ungerade Zahl iſt, beyde aber unter ſich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner iſt auch zu merken, daß, da $rr = pp + qq$ und alſo r ein Theiler von $pp + qq$, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwey Quadraten ſeyn, und weil dieſelbe ungerade, in der Form $4n + 1$ enthalten ſeyn müſſe.

XI. Nehmen wir erſtlich $m = 1$ an, ſo wird $fg = 1800 = 8 . 9 . 25$, woraus folgende Zerlegungen entſpringen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$, und $g = 25$, oder $f = 225$

und $g=8$. Aus der erſten Zerlegung wird $r=f-g$ $=1799=4^n+3$; würde aus der andern $r=f-g$ $=191=4^n+3$; und aus der dritten $r=f-g$ $=47=4^n+3$; aus der vierten aber $r=f-g=217$ 4^n+1; daher die drey erſten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt, woraus man überhaupt ſchließen kann, daß der größere Faktor ungerade, der kleinere aber gerade ſeyn müſſe. Allein hier kann auch der Werth $r=217$ nicht ſtatt finden, weil ſich dieſe Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten iſt.

XII. Nimmt man $m=2$, ſo wird $fg=7200$ $=32.225$; daher nimmt man $f=225$ und $g=32$, ſo daß $r=f-g=193$, welche Zahl eine Summe von zwey Quadraten iſt, und alſo verdienet probirt zu werden. Da nun $q=120$ und $r=193$, ſo wird, weil $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, alſo $r+q=313$, und $r-q=73$, ſo ſieht man wohl, daß für pp kein Quadrat herauskomme, weil dieſe Faktoren nicht Quadrate ſind. Wollte man ſich die Mühe geben, für m noch andere Zahlen zu nehmen, ſo würde doch alle Arbeit vergebens ſeyn, wie wir itzt noch zeigen wollen.

§. 373.

Lehrſatz. Es iſt nicht möglich, daß dieſe zwey Formeln $pp+qq$ und $pp+3qq$ zugleich Quadrate werden können, oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, iſt die andere gewiß keines; welches ſich alſo beweiſen läßt.

Da p eine ungerade und q eine gerade Zahl iſt, wie wir geſehen haben, ſo kann $pp+qq$ nicht anders ein Quadrat ſeyn, als wenn $q=2rs$ und $p=rr-ss$; die andere aber $pp+3qq$ kann nur alsdenn ein Quadrat werden, wenn $q=2tu$ und $p=tt-3uu$ oder $p=3uu-tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Produkt ſeyn muß, ſo ſetze man für beyde $q=2abcd$ und nehme für die erſte $r=ab$ und $s=cd$; für die

andere aber $t = ac$ und $u = bd$, ſo wird für die erſtere $p = aabb - ccdd$, für die andere aber $p = aacc - 3bbdd$, oder $p = 3bbdd - aacc$, welche beyde Werthe einerley ſeyn müſſen; daher wir bekommen entweder $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, oder $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; wobey zu merken iſt, daß die Zahlen a, b, c, und d überhaupt kleiner ſind als p und q. Wir müſſen alſo einen jeden dieſer beyden Fälle beſonders erwägen. Aus dem erſtern erhalten wir $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ oder $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$; daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa + dd}{aa + 3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat ſeyn muß. Hier kann aber der Zähler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz dazwiſchen $2dd$ iſt. Sollte daher 2 ein gemeiner Theiler ſeyn, ſo müßte ſowohl $\frac{aa + dd}{2}$ als auch $\frac{aa + 3dd}{2}$ ein Quadrat ſeyn; beyde Zahlen aber a und d ſind in dieſem Fall ungerade, und alſo ihre Quadrate von der Form $8n + 1$; daher die letztere Formel $\frac{aa + 3dd}{2}$ dieſe Form $4n + 2$ haben wird, und kein Quadrat ſeyn kann. Folglich kann 2 kein gemeiner Theiler ſeyn, ſondern der Zähler $aa + dd$ und der Nenner $aa + 3dd$ ſind unter ſich untheilbar; daher ein jeder für ſich ein Quadrat ſeyn muß. Weil nun dieſe Formeln den erſten ähnlich ſind, ſo folgt, daß, wenn die erſten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleiche Formeln Quadrate ſeyn würden; und ſo könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, ſo kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieſer Schluß iſt aber nur in ſofern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ auf dergleichen führt. Hieraus aber wird $aabb$

$+aacc = 3bbdd + ccdd$, oder $aa(bb+cc) = dd(3bb+cc)$ und daher $\frac{aa}{dd} = \frac{bb+cc}{3bb+cc} = \frac{cc+bb}{cc+3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat ſeyn muß, ſo daß dadurch der vorige Schluß vollkommen beſtätiget wird, indem, wenn es in den größten Zahlen ſolche Fälle gäbe, wo $pp+qq$ und $pp+3qq$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinſten Zahlen vorhanden ſeyn müßten, welches doch ganz und gar nicht ſtatt findet.

Anhang.

Vermiſchte Aufgaben ohne Aufloͤſung, zur Uebung fuͤr Anfaͤnger.

Erſte Aufgabe.

Es hat jemand ſo viel Schulden, daß er jaͤhrlich 1360 Thaler Intereſſen bezahlen muß. Den vierten Theil der geborgten Kapitalien verintereſſirt er mit 5, und das Uebrige mit 4 Procent. Wie hoch belaufen ſich ſeine Schulden?

Zweyte Aufgabe.

Eine Dame, welche nach ihrem und ihrer Tochter Alter gefragt wird, beantwortet dieſe Frage auf folgende Art. „Ich bin noch einmal ſo alt, als meine Tochter, und vor 20 Jahren war ich ſechsmal aͤlter als ſie.“ Wie viel betrug alſo das Alter dieſer beyden Damen?

Dritte Aufgabe.

Einem Neugierigen, welcher die Garniſon einer Feſtung zu wiſſen verlangt, giebt ein Officier folgende Antwort: Zwey Drittel der Garniſon beſteht aus Infanteriſten, der ſechſte Theil aus Cavalleriſten, und der achte Theil aus Artilleriſten, wozu noch 500 Mann Invaliden kommen. Wie ſtark iſt alſo dieſe Garniſon?

Vierte Aufgabe.

Die Maͤurer und Handlanger, die zu einem gewiſſen Bau gebraucht werden, koſten dem Bauherrn taͤglich 50

Thaler. Ein Mäurer bekommt jeden Tag 8 Groſchen; ein Handlanger aber 4 Groſchen, und zwey Mäurer haben allemal einen Handlanger. Wie viel beträgt alſo die Anzahl der Mäurer und Handlanger?

Fünfte Aufgabe.

Ein Cavalier reiſet von hier nach Madrit, und legt täglich 10 Meilen zurück. Nach vier Tagen wird ihm ein Bedienter nachgeſchickt, der täglich 15 Meilen reitet, und ihn einholt, ehe er noch die Grenze von Spanien erreicht hat. Nach wie viel Tagen und in welcher Entfernung von hier iſt alſo der Cavalier von dem Bedienten eingeholt worden?

Sechste Aufgabe.

Eine mit Oeſterreichiſchen Soldaten beſetzte Schanze, welche einen heftigen Angriff von den Franzoſen ausſtehen mußte, wurde von ihrer Beſatzung ſo gut vertheidigt, daß der Kaiſer einem jeden Officier 100 Gulden, einem Unterofficier 20, und einem gemeinen Soldaten 5 Gulden zur Belohnung ihres tapfern Betragens auszahlen ließ. Die ganze Summe des ausgezahlten Geldes machte 3100 Gulden aus, und die Zahl der gemeinen Soldaten betrug zehnmal ſo viel als die Anzahl der Unterofficiere, die Zahl der Unterofficiere aber war dreymal ſo groß, als die Anzahl der Officiere. Aus wie viel Perſonen hat alſo die Beſatzung der Schanze beſtanden?

Siebente Aufgabe.

Ein Weinſchenker hat nur zweyerley Sorten von Rheinwein, nemlich alten, wovon er die Kanne für 1 Thaler 12 Groſchen verkauft, und jungen, wovon er die Kanne für 10 Groſchen giebt. Es verlangt aber jemand eine Kanne Rheinwein für 20 Groſchen. Er vermiſcht daher alten und jungen Wein dergeſtalt unter einander, daß er, ohne ſich Schaden zu thun, und ohne den Käufer zu übertheuern, die Kanne für 20 Groſchen geben

kann. Es fragt ſich alſo: wie viel hat er von der guten und wie viel von der ſchlechten Sorte nehmen müſſen?

Achte Aufgabe.

Ein Gaſtwirth hat eine aus Officieren, Kaufleuten und Studenten beſtehende Geſellſchaft bey ſich gehabt, wovon jeder ihm für die Mahlzeit 1 Thlr. 8 Gr. bewilliget hatte. Den folgenden Tag will er das eingenommene Geld zählen, um zu ſehen, ob ihn jeder richtig bezahlt habe. Zum Unglück aber hat er die Anzahl der Perſonen vergeſſen; doch erfährt er auf ſein Befragen von den Leuten im Hauſe ſo viel, daß die Officiere und Kaufleute zuſammen 16 Perſonen, und die Studenten nebſt den Officieren, deren nur halb ſo viel als Studenten geweſen wären, 18 Perſonen ausgemacht hätten. Wie groß iſt alſo die Anzahl der Officiere, Studenten und Kaufleute geweſen, und wie viel hat der Wirth einnehmen müſſen?

Neunte Aufgabe.

Ein Vater legte ſeinem zwölfjährigen Sohne, um ſeine Geſchicklichkeit in der Rechenkunſt zu prüfen, folgende Frage vor. Ich bin itzt viermal ſo alt als du; wie lange müßten wir beyde wohl noch leben, damit dein Alter nur halb ſo groß wäre, als das meinige?

Zehnte Aufgabe.

Zwey Freunde, die 170 Meilen von einander entfernt ſind und ſich in langer Zeit einander nicht geſehen haben, nehmen ſich vor, an einem Tage aus ihrem Wohnorte auszureiſen, und ihre Reiſe ſo lange fortzuſetzen, bis ſie einander auf der verabredeten Straße begegnen. Der erſte legt täglich 9 Meilen zurück; der andere aber, der ihm entgegen reiſet, kann nur Tagereiſen von 8 Meilen machen. Es fragt ſich alſo: nach wie viel Tagen werden ſie einander begegnen, und wie weit wird jeder reiſen müſſen?

Eilfte Aufgabe.

Ein General, der eine Feſtung belagerte, ließ von zwey Regimentern Sturm laufen, und verſprach einem jeden Regimente 4000 Thaler zur Belohnung, wenn die Sache glücklich ablaufen ſollte. Nachdem die Feſtung durch die Tapferkeit dieſer Soldaten erobert worden war, ließ ihnen der General die verſprochene Belohnung auszahlen, welche unter die gemeinen Soldaten gleich vertheilt wurde, weil die Officiere nichts davon verlangten. Da aber das eine Regiment viel gelitten und 100 Mann weniger behalten hatte, als das andere von dieſen beyden Regimentern, ſo bekam ein Soldat von dem erſten 2 Thaler mehr, als ein Soldat von dem andern Regimente. Wie ſtark war alſo noch jedes Regiment nach Eroberung der Feſtung, und wie viel erhielt jeder Soldat?

Zwölfte Aufgabe.

Ein Fabrikant klagt auf der Michaelmeſſe 1800, daß es immer ſchlechter und ſchlechter mit ſeinem Handel gehe. „Ich habe, ſagt er zu einem Freunde, in dieſer Meſſe 500 Thaler weniger, als in der letzten Oſtermeſſe, in der Oſtermeſſe aber 600 Thaler weniger, als voriges Jahr in der Michaelmeſſe, und in der Michaelmeſſe 1799 ſchon 400 Thaler weniger, als in der vorhergehenden Oſtermeſſe gelöſet, wo meine Einnahme noch einmal ſo viel betrug, als in der itzigen Meſſe.“ — Wie viel hat er alſo eigentlich in jeder von den itzt benannten Meſſen eingenommen?

Dreyzehnte Aufgabe.

Ein Kaufmann wagt ein anſehnliches Kapital daran, um während der dreyjährigen Belagerung einer Feſtung allerhand Proviſionen hinein zu bringen. Im erſten Jahre iſt er ſchon ſo glücklich, mit ſeinem Kapitale 50 Procent zu gewinnen. Mit dieſem Gewinnſte vermehrt

er ſein Kapital, von welchem er im zweyten Jahre eben denſelben Gebrauch macht. Er gewinnt mit dieſem Gelde wiederum 50 Procent, und wendet dieſen Gewinnſt nebſt ſeinem vorigen Kapitale im dritten Jahre zu einem ähnlichen Handel an, welcher aber in dieſem Jahre ſehr unglücklich ausfällt. Allein obgleich ſein Verluſt 10000 Thaler beträgt, ſo bleibt ihm am Ende dieſes Jahres doch noch einmal ſo viel übrig, als er im erſten Jahre der Belagerung zu dieſem Behuf angewandt hatte. Es iſt alſo die Frage: wie viel hat dieſes Kapital betragen?

Vierzehnte Aufgabe.

Es gewinnet jemand ein großes Loos in der Lotterie, und wendet $\frac{3}{4}$ von dieſem Gewinnſte zur Erkaufung eines Rittergutes an. Die Hälfte des übrigen Geldes beſtimmt er zur Reparatur ſeines Wohnhauſes, und ob er gleich überdieſes noch 4000 Thaler für Bücher und Hausgeräthe ausgiebt, ſo behält er doch noch 1000 Thaler übrig. Wie viel hat er alſo in der Lotterie gewonnen?

Funfzehnte Aufgabe.

Ein gewiſſer Cavalier hat jährlich 4400 Thaler Einkünfte von ſeinen drey Rittergütern, wovon er das kleinſte zu 5 Procent, das zweyte aber, welches noch einmal ſo viel werth iſt, zu 4 Procent, und das dritte, welches dreymal ſo viel werth iſt, als das erſte, nur zu 3 Procent nützet. Wie viel beträgt alſo der Werth dieſer drey Güter?

Sechszehnte Aufgabe.

Ein Vater hinterläßt vier Söhne, und verordnet in ſeinem Teſtamente, daß ſein Vermögen, welches in 9282 Thlrn. beſteht, folgendergeſtalt unter ſie vertheilt werden ſoll. Der zweyte Sohn ſoll, weil auf ſeine Er-

ziehung weniger, als auf die Erziehung des älteſten, verwandt worden iſt, $\frac{1}{10}$ mehr als der älteſte, der dritte aus eben der Urſache wiederum $\frac{1}{10}$ mehr, als der zweyte, und der vierte $\frac{1}{10}$ mehr, als der dritte Sohn erhalten. Wie viel beträgt alſo das Erbtheil eines jeden?

Siebenzehnte Aufgabe.

Ein Cavalier nimmt einen Bedienten unter dieſer Bedingung an, daß er allemal im folgenden Jahre, wenn er ſich gut aufführen würde, 5 Thaler Lohn mehr, als im vorhergehenden, erhalten ſollte. Der Bediente bleibt 12 Jahre bey ſeinem Herrn in Dienſten, und läßt dieſe ganze Zeit über ſeinen Lohn ſtehen, weil er ſeine nothwendigen Ausgaben von den Trinkgeldern und den Geſchenken ſeines Herrn beſtreiten kann. Nach Verlauf dieſer zwölf Jahre ſtirbt ſein Herr, und die Erben müſſen ihm, vermöge des angeführten Contracts, 570 Thaler Lohn bezahlen. Nun entſteht alſo die Frage: wie viel Lohn iſt ihm im erſten Jahre bewilliget worden?

Achtzehnte Aufgabe.

Es wurde jemand von einem Anverwandten zum Univerſalerben unter dieſer Bedingung eingeſetzt, daß er $\frac{2}{5}$ von der Verlaſſenſchaft der Schweſter des Verſtorbenen, $\frac{1}{20}$ der Kirche, und 200 Thaler dem Hoſpital auszahlen ſollte. Nachdem er dieſes gethan hatte, ſo blieb ihm doch noch die Hälfte von der Verlaſſenſchaft übrig. Wie viel betrug alſo die ganze Verlaſſenſchaft?

Neunzehnte Aufgabe.

Es fragt jemand, wie weit es von Leipzig nach Frankfurt am Mayn ſey. Ein andrer will die Weite von Frankfurt nach Strasburg wiſſen. Hierauf antwortet ein dritter, daß er einmal von Leipzig nach Strasburg über

Frankfurt mit der Poſt gereiſet ſey, und 65 Meilen habe bezahlen müſſen; er wiſſe auch noch ſo viel, daß der Weg von Leipzig bis Frankfurt 15 Meilen mehr, als der Weg von Frankfurt nach Strasburg betragen habe. Wie weit iſt alſo Leipzig von Frankfurt, und Frankfurt von Strasburg entfernt?

Zwanzigſte Aufgabe.

Es wird jemand, der eine Compagnie Soldaten vielmal exerciren geſehen hat, nach der Stärke der Compagnie gefragt. „Ich habe, giebt er dem Fragenden zur Antwort, die Soldaten zwar nicht gezählt; doch habe ich folgende Bemerkung gemacht, aus welcher ſich wohl dieſe Anzahl wird beſtimmen laſſen. Wenn 2 Mann in einer Reihe marſchirten, ſo blieb zuletzt einer übrig; marſchirten ſie drey Mann hoch, ſo ſah man in der letzten Reihe nur 2 Soldaten; wurden 4 Mann in eine Reihe geſtellt, ſo kamen in die letzte Reihe 3; bey 5 Mann enthielt die letzte Reihe 4, und bey 6 Mann enthielt ſie 5 Soldaten. Sobald aber 7 Mann in eine Reihe kamen, ſo beſtand die letzte Reihe aus eben ſo viel Soldaten, als die übrigen.“ — Wie ſtark iſt alſo dieſe Compagnie geweſen?

Ein und zwanzigſte Aufgabe.

Ein abgebrannter Schulhalter kömmt in eine anſehnliche Geſellſchaft und bittet um einen Beytrag zu Wiederaufbauung ſeines Schulhauſes. Jedes Mitglied dieſer Geſellſchaft giebt ihm 5 Thaler, worüber der Abgebrannte eine ſo große Freude hat, daß er ausruft: „Ach, wenn es in unſrer Stadt ſo viel ſolcher Geſellſchaften gäbe, als hier Perſonen ſind, und ich von jedem Mitgliede eben ſoviel erhielte, als ich itzt erhalten habe, ſo könnte ich davon mein ganzes Haus wieder aufbauen, welches eben ſo viel Hunderte gekoſtet hat, als

hier Perſonen verſammlet ſind!" — Wie viel hat alſo das Haus gekoſtet?

Zwey und zwanzigſte Aufgabe.

Die Mitglieder einer vornehmen Geſellſchaft legen zuſammen, um den Geburtstag ihres Landesherrn feyerlich zu begehen, und zwar beträgt der Beytrag eines jeden gerade ſo viel Thaler, als die Anzahl der Mitglieder. Weil man aber hernach findet, daß die aufgewandten Unkoſten, die ſich auf 1200 Thaler belaufen, den Beytrag der Mitglieder weit überſteigen, ſo muß jedes Mitglied noch 10 Thaler Nachſchuß geben. Wie viel beträgt alſo die Anzahl der Mitglieder dieſer Geſellſchaft?

Drey und zwanzigſte Aufgabe.

Ein Caſſirer, der viel Geld einzunehmen hat, läßt ſich, um die Einnahme bequemer überſehen zu können, einen Schrank mit verſchiedenen Schubkaſten machen, und jeden Kaſten wieder in ſo viele Fächer abtheilen, als die Zahl der Kaſten beträgt. Nunmehr vertheilt er das eingenommene Geld, welches in 1724 Paqueten beſteht, dergeſtalt, daß er in jedes Fach ſo viel Paquete legt, als es Fächer in jedem Kaſten giebt. Nur in das letzte Fach, weil das Geld nicht zureicht, kommen 4 Paquete weniger, als in die übrigen Fächer. Wie viel Schubkaſten hat alſo der Schrank und wie viel Fächer jeder Kaſten gehabt?

Vier und zwanzigſte Aufgabe.

Ein Kaufmann, der ſein Kapital zu $33\frac{1}{3}$ Procent nützt, und jährlich nur 1000 Thaler zu ſeinem Unterhalte braucht, ſchlägt den Ueberreſt allemal wiederum zum Kapital, und gewinnt damit immer $33\frac{1}{3}$ Procent.

Nach drey Jahren iſt ſein Vermögen noch einmal ſo groß, als es anfänglich war. Wie viel hat er alſo im erſten Jahre ſeiner Handlung gehabt?

Fünf und zwanzigſte Aufgabe.

Die Armee eines Generals, der eine Schlacht zu liefern genöthiget war, enthielt viermal mehr Ausländer, als Landeskinder. Nach der Schlacht, in welcher 1000 Ausländer und 500 Landeskinder blieben, betrug die Zahl der erſten fünfmal mehr, als die Zahl der letztern. Wie ſtark war alſo die Armee des Generals?

Sechs und zwanzigſte Aufgabe.

Ein Schüler fragt ſeinen Lehrer in der Rechenkunſt, wie alt er eigentlich ſey, und bekömmt von ihm dieſe Antwort: „Wenn du die Cubikzahl und das Quadrat meiner Jahre zuſammen addireſt, ſo erhältſt du mein Alter 2550 mal.“ — Wie alt war alſo der Lehrer?

Sieben und zwanzigſte Aufgabe.

Es erbt jemand eine Bibliothek, wovon er die ihm unbrauchbaren Bücher, welche den vierten Theil betragen, in die Auction giebt. Jedes Jahr vermehrt er ſeine Büchersammlung mit 500 Bänden, und nach 20 Jahren beſitzt er noch einmal ſo viel Bücher, als er anfänglich geerbt hatte. Wie groß war alſo die Anzahl der geerbten Bücher?

Acht und zwanzigſte Aufgabe.

Ein Bedienter, der für ſeinen Herrn vier goldne Taſchenuhren zum Anſehen geholt hat, kann ſich nicht mehr auf den Preis einer jeden Uhr beſinnen; doch weiß er noch ſo viel, daß der Uhrmacher für alle vier

190 Thaler, für die wohlfeilſte 40, für die zweyte etliche Thaler mehr, für die dritte eben ſo viel mehr, als für die zweyte, und für die vierte wiederum *eben* ſo viel Thaler mehr, als für die dritte gefordert habe. Wie viel beträgt alſo wohl der Preis der zweyten, dritten und vierten Uhr?

Neun und zwanzigſte Aufgabe.

Es kömmt jemand aus einer Verſammlung und erzählt, daß er mit einer aus 5 Perſonen beſtehenden Familie geſpeiſt habe, die zuſammen 300 Jahr alt wären. Auf fernere Nachfrage, wie alt jedes Mitglied dieſer Familie ſey, giebt er zur Antwort. „Der Vater iſt 20 Jahr älter als die Mutter, und die Mutter 15 Jahr älter, als ihr Stiefſohn, dieſer aber 10 Jahr älter, als ihr rechter Sohn, und ihr Sohn 5 Jahr älter als ihre Tochter.“ — Wie alt iſt alſo jede von dieſen Perſonen?

Dreyßigſte Aufgabe.

Ein Officier, der zum Recognoſciren eines feindlichen Lagers ausgeſchickt worden iſt, meldet ſeinem Generale durch ein Billet die Anzahl der Regimenter, welche er in dem Lager beobachtet hat, auf folgende Art, damit der abgeſchickte Bote, wenn er etwa das ſchlecht verſiegelte Billet öffnen ſollte, dieſe Nachricht nicht verſtehen könnte. „Die dreyeckige, viereckige und fünfeckige Zahl machen zuſammen 147 aus.“ — Wie viel betrug alſo die Anzahl der feindlichen Regimenter, wovon hier die Summe von drey vieleckigen Zahlen angegeben wird?

Ein und dreyßigſte Aufgabe.

Es kauft jemand einige Kuxe in einem Bergwerke, verliert aber gleich im erſten Jahre, wegen der Zubuße,

die er bezahlen muß, 10 Procent. Im zweyten Jahre iſt ſein Verluſt noch größer, nemlich 20 Procent, und im dritten Jahre beträgt derſelbe $16\frac{2}{3}$ Procent. Da er auch im vierten Jahre eine Einbuße von 100 Thalern leidet, ſo hört er auf, ſein Glück im Bergwerke zu ſuchen, indem er findet, daß die hierzu anfänglich angewandte Summe bis auf die Hälfte geſchmolzen iſt. Wie viel betrug alſo dieſe Summe?

Regiſter
über beyde Theile.

Die römiſche Zahl zeiget den Theil, und die dabey ſtehende Ziffer die Seite an.

A.

Achtecke oder achteckige Zahlen I. 179.
— Regel zu Berechnung ihrer Wurzeln II. 58.
Addition einfacher Größen I. 7.
— zuſammengeſetzter Größen I. 103.
— der Brüche I. 38.
Aequation. S. Gleichung.
Algebra, was dieſes Wort bedeute I. 5.
— worinnen das Weſentliche dieſer Wiſſenſchaft beſtehe I. 6. II. 3.
Analyſis oder Analytik. S. Algebra.
— unbeſtimmte II. 141.
Arithmetik I. 4.
Aufgaben, was man bey Auflöſung der algebraiſchen zu beobachten habe II. 3.
— welche man unbeſtimmte nenne II. 141.

B.

Baſtardbrüche I. 31.
Bejahend. S. Poſitiv.
Binomium, welche Zahlen in der Algebra dieſen Namen führen II. 60.

Binomium, wie man daraus die Quadratwurzel finden könne II. 61.
Biquadrat I. 66. 73.
Biquadratiſche Gleichungen. S. Gleichungen.
Bombelli Regel II. 115.
Brüche oder gebrochne Zahlen I. 22. 29.
— ächte und unächte I. 31.
— allgemeine Eigenſchaften derſelben I. 35.
— Addition und Subtraction derſelben I. 38.
— Multiplication und Diviſion mit denſelben I. 41.
— Auflöſung derſelben in unendliche Reihen I. 117.
Buchſtaben, Regeln von Verſetzung derſelben I. 146.
Buchſtabenrechenkunſt I. 5.

C.

Cardans Regel II. 98.
Charakteriſtik der Logarithmen I. 96.
Coefficient I. 142.
Cubikwurzeln I. 62.
— Regeln zur Ausziehung derſelben I. 139.
Cubikzahlen überhaupt I. 60.
— zuſammengeſetzter Größen I. 137.
Cubiſche Gleichungen. S. Gleichungen.
Cubocubus I. 73.
Cubus. S. Cubikzahl.

D.

Decimalbrüche I. 95.
— unendliche I. 209.
Diamanten, wie man ihren Preis berechnen müſſe. I. 202.
Dignität der Zahlen oder Größen I. 66.
Diviſion mit einfachen Größen I. 20.
— mit zuſammengeſetzten Größen I. 113.
— mit Brüchen I. 42.
— mit eingebildeten Zahlen I. 58.
— mit Potenzen I. 72.
Dreyeck oder dreyeckige Zahlen I. 175.
— wie man diſelben aus der gegebenen Seitenzahl finden könne I. 176.

Dreyeckswurzeln, Regel zur Berechnung derſelben II. 55.
— wie man diejenigen finden könne, die zugleich Quadratzahlen ſind II. 197.

E.

Eingebildete oder imaginäre Zahlen I. 56.
Einheit I. 3.
Exponenten der Dignität I. 68.
— — gebrochene I. 76.
Exponenten der Verhältniſſe I. 181.
— der Progreſſion I. 204.

F.

Factores, was für Zahlen dieſen Namen führen I. 14. 17.
— wie man dieſelben in gewiſſen Fällen ausfindig machen könne II. 230.
Factum I. 17.
Fall der Körper, wie man ihn berechnen müſſe I. 201.
Figurirte Zahlen. S. Zahlen.
Fünfecke oder fünfeckige Zahlen I. 178.
— ſolche, die zugleich Quadratzahlen ſind II. 198.
Fünfeckwurzeln, wie man ſie finden könne II. 57.

G.

Gleichungen, was man in der Algebra dadurch verſtehe I. 6. II. 5.
— vom erſten Grade II. 6.
— quadratiſche, Natur derſelben II. 71.
— reine quadratiſche II. 36.
— vermiſchte quadratiſche II. 46.
— reine cubiſche II. 79.
— vollſtändige cubiſche II. 85.
— biquadratiſche II. 107.
— einfache unbeſtimmte II. 141.
— zuſammengeſetzte unbeſtimmte II. 161.
— Auflöſung derſelben durch Näherung II. 128.
Glieder einer Progreſſion, wie man die Summe derſelben finden könne I. 168. 207.

Größe, Bedeutung dieſes Worts in der Mathematik I. 3.
Größen, poſitive und negative I. 9.
— entgegengeſetzte I. 11.
— Ausmeſſung derſelben I. 4.

H.

Hauptnenner bey gebrochnen Zahlen I. 39.
Hinterglied eines Verhältniſſes I. 181.

J.

Intereſſenrechnung I. 214.
Irrationalformeln, wie ſie bisweilen rational gemacht werden können II. 166.
Irrational-Poteſtäten durch unendliche Reihen I. 150.
Irrationalzahlen I. 52.
— Bezeichnung derſelben durch gebrochne Exponenten I. 76.
— Rechnung mit denſelben I. 133.

K.

Kanonenkugeln, wie man das Gewicht derſelben aus ihren Durchmeſſern finden könne I. 200.
Kennziffer der Logarithmen I. 96.
Kettenregel I. 194.
Kugeln, wie ſich dieſelben gegen einander verhalten I. 200.

L.

Längen, wie ſie gemeſſen werden I. 3. 4.
Logarithmen, was für Zahlen unter dieſer Benennung verſtanden werden I. 85.
— die Art, ſie vorzuſtellen I. 94.
— Nutzen derſelben I. 87.
Logarithmiſche Tabellen I. 89.

M.

Maaß der Größen I. 3. 4.
Minus, Bedeutung dieſes Worts I. 7.

Multiplication einfacher Größen I. 12.
— zuſammengeſetzter Größen I. 107.
— gebrochner Zahlen I. 41.
— der Irrationalzahlen I. 133.
— der Potenzen I. 71.
— der eingebildeten Zahlen I. 57.

N.

Nachſatz in einem Verhältniſſe I. 181.
Näherung, Anweiſung ſich derſelben bey Auflöſung algebraiſcher Gleichungen zu bedienen II. 128.
Negativ, welche Zahlen und Größen in der Algebra ſo genannt werden I. 9.
Nenner eines Bruchs I. 30.
— einer Progreſſion I. 204.

P.

Pell, deſſen Erfindung II. 204.
Plus, Bedeutung dieſes Worts I. 7.
Poſitiv, welche Größen ſo genannt werden I. 8. 9.
Potenzen oder Poteſtäten der Zahlen I. 66.
— Regeln zu ihrer Berechnung I. 71.
— negative I. 69. 154.
— höhere I. 140.
Primzahlen I. 18.
Product I. 13.
Progreſſionen, arithmetiſche I. 165.
— Summation derſelben I. 169.
Progreſſionen, geometriſche I. 204.
— Summation derſelben I. 207.
Proportionen, arithmetiſche I. 161.
— geometriſche I. 186.
— ſtetige und unſtetige I. 163.
— Nutzen derſelben I. 192.

Q.

Quadrat. S. Quadratzahl.

Quadratiſche Gleichungen. S. Gleichungen.
Quadratocubus I. 73.
Quadratoquadrat I. 73.
Quadratwurzeln I. 47.
— Regeln zur Ausziehung derſelben I. 50. 129.
— aus Binomien II. 60.
Quadratzahlen I. 47.
Quotus oder Quotient I. 20.

R.

Rationalzahlen I. 53.
Rechenkunſt I. 4.
Rechnungsarten mit einfachen Größen I. 3.
— mit zuſammengeſetzten Größen I. 103.
— Urſprung und Verbindung derſelben I. 81.
Regeldetri I. 190.
Regula coci II. 155.
Regula quinque II. 203.
Reihen, unendliche I. 117. 150.

S.

Sechsecke oder ſechseckige Zahlen I. 179.
Sechseckwurzeln, wie man ſie finden könne II. 58.
Seite oder Seitenzahl I. 175.
— wie man daraus die vieleckigen Zahlen finden könne II. 54.
— Regeln zu Berechnung derſelben, wenn die vieleckige Zahl gegeben wird II. 54.
Siebenecke oder ſiebeneckige Zahlen II. 54.
— Formel, ihre Wurzel zu finden II. 58.
Subtraction einfacher Größen I. 7.
— zuſammengeſetzter Größen I. 105.
— gebrochner Zahlen I. 38.
Surdiſche Zahlen. S. Irrationalzahlen.

T.

Theiler der Zahlen von 1 bis 20 I. 28.

Theiler, Regel, den größten gemeinen Theiler zweyer Zahlen zu finden I. 183.

U. und V.

Unendlich, was man dadurch in der Algebra verſtehe I. 33.
— wie man daſſelbe bezeichne I. 34.
Unendliche Reihen I. 117. 150.
Verhältniſſe, arithmetiſche und geometriſche I. 159. 181.
— zuſammengeſetzte I. 197.
— vervielfältigte I. 199.
Verneinend. S. Negativ.
Verſetzung der Buchſtaben I. 146.
Vielecke oder vieleckige Zahlen. S. Zahlen.
Vierecke oder viereckige Zahlen I. 177.
Viereckwurzeln II. 57.
Vorderglied eines Verhältniſſes I. 181.

W.

Wurzeln der Dignitäten I. 74.
— der vieleckigen Zahlen II. 54.
— der Gleichungen II. 86.

Z.

Zähler eines Bruchs I. 30.
Zahlen, Erklärung dieſes Begriffs I. 4.
— ganze I. 10.
— einfache und zuſammengeſetzte I. 18.
— gerade und ungerade I. 25.
— gebrochene I. 29.
— irrationale oder ſurdiſche I. 52.
— rationale I. 53.
— imaginäre oder eingebildete I. 56.
— figurirte oder vieleckige I. 174.
— dreyeckige I. 175.
— viereckige I. 177.
— fünfeckige und ſechseckige I. 178. 179.
— ſiebeneckige, achteckige und neuneckige I. 179.

Zahlenkunſt I. 4.
Zeiger, was man unter dieſer Benennung bey einer Progreſſion verſtehe I. 166.
Zimmer, wie man den Raum zweyer Zimmer mit einander vergleichen müſſe I. 199.
Zinſen eines Capitals, wie man die Berechnung derſelben anſtellen müſſe I. 214.
Zuſammenſetzung der Verhältniſſe I. 197.

Staatl. Bibliothek Passau

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard,

Auszug aus Herrn Leonhard Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra

Bd.: 2

Berlin 1821

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 103-1/2(3)
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346093-7